

Zastosowanie procesora GPU w analizie nieustalonego pola temperatury w trójwymiarowym modelu elektrycznego ogrzewania podłogowego

Streszczenie. W artykule przedstawiono numeryczną analizę nieustalonego pola temperatury w trójwymiarowym modelu elektrycznego grzejnika podłogowego. Sformulowano odpowiednie zagadnienie brzegowo-początkowe, które dyskretyzowano niejawną metodą różnic skończonych. Otrzymane układy równań rozwiązano przy wykorzystaniu metody BiCGStab i procesora GPU. Dodatkowe zastosowanie procesora GPU pozwoliło ponad 5-krotnie skrócić czas obliczeń w stosunku do programu pracującego tylko na procesorze CPU.

Abstract. This paper presents the numerical analysis of the transient temperature field in a three-dimensional model of an electric floor heater. An appropriate initial-boundary value problem was formulated, which was discretised using the implicit finite difference method. Obtained systems of equations were solved using the BiCGStab method and the GPU. The additional application of the GPU reduced the time of computations over 5 times compared to the program executed only on the CPU. (The application of GPU in the analysis of transient temperature field in a three-dimensional model of electric floor heating system).

Słowa kluczowe: elektryczne ogrzewanie podłogowe, obliczenia równoległe, GPGPU, nieustalone pole temperatury.

Keywords: electric floor heating, parallel computations, GPGPU, transient temperature field.

Wstęp

Numeryczna analiza zagadnień termicznych często wymaga wykonania długotrwałych obliczeń komputerowych. Dotyczy to zwłaszcza badania dynamiki zjawisk fizycznych oraz konieczności uwzględnienia trzech wymiarów w stosowanych modelach. Jedną z metod skrócenia czasu trwania termicznych obliczeń numerycznych jest zastosowanie obliczeń równoległych. Obliczenia takie wymagają odpowiedniej dekompozycji badanego zagadnienia [1]. Najczęściej dekompozycja dotyczy analizowanego obszaru lub zastosowanej metody numerycznej. Obliczenia równoległe wykonywane są zazwyczaj na dedykowanych komputerach masywnie równoległych oraz klastrach. Od kilku lat interesującą alternatywą dla powyższych systemów jest zastosowanie procesorów kart graficznych (GPU). Procesory te umożliwiają także wykonywanie obliczeń numerycznych nie związanych z wyświetlaniem obrazu. Technologia ta nazywana jest obliczeniami ogólnego przeznaczenia realizowanymi na procesorach kart graficznych (GPGPU) [2, 3]. O jej dużej popularności zdecydował niski koszt procesorów graficznych oraz ich wysoka wydajność obliczeniowa, wielokrotnie przewyższająca wydajność tradycyjnych procesorów (CPU). Zastosowanie procesora karty graficznej oraz współpracującego z nim tradycyjnego procesora pozwala więc szybko i niskim kosztem wykonać numeryczną analizę skomplikowanych zagadnień termicznych.

Długotrwałe obliczenia termiczne występują m.in. w analizie i symulacji pracy układów ogrzewania podłogowego [4]. W zależności od czynnika grzewczego wyróżnia się ogrzewanie podłogowe wodne, elektryczne i powietrzne [5]. Większość prac badawczych poświęcona jest analizie pola termicznego w ogrzewaniu wodnym [4, 6-11]. Znacznie mniej publikacji dotyczy natomiast ogrzewania elektrycznego [12-15] i powietrznego [16-19]. W modelowaniu systemów ogrzewania podłogowego stosowane są metody analityczne [9-11, 13, 17] oraz metody numeryczne [4, 6-8, 12, 14, 15, 18, 19]. Zaletą metod analitycznych jest możliwość otrzymania dokładnego rozwiązania w postaci wzoru matematycznego. Niestety, w przypadku badania modeli o skomplikowanej geometrii oraz w analizie układów nieliniowych, zastosowanie metod analitycznych jest bardzo trudne, a czasami wręcz

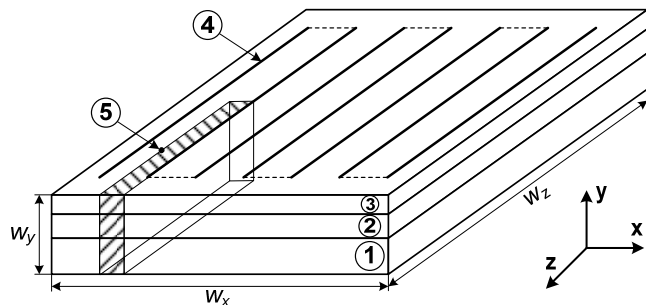
niemożliwe. W takich właśnie sytuacjach stosowane są metody numeryczne. Jeśli badane zagadnienia opisane są równaniami różniczkowymi cząstkowymi, to zazwyczaj jest to jedna z następujących metod: elementów skończonych (FEM) [20, 21], różnic skończonych (FDM) [22, 23], objętości skończonej (FVM) [24] oraz elementów brzegowych (FBM) [24, 25]. W większości przypadków układy ogrzewania podłogowego modelowane są jako płasko-równoległe (dwuwymiarowe) [4, 6-11, 14, 15, 17-19]. Takie uproszczenie znacznie zmniejsza rozmiar modelu, a tym skracając czas obliczeń. Jednakże zastosowanie trzech wymiarów pozwala dokładniej zbadać rozkład pola temperatury w przekroju grzejnika, zwłaszcza przy jego krawędziach. Publikacji poświęconych modelowaniu układów trójwymiarowych jest znacznie mniej, niż artykułów dotyczących układów dwuwymiarowych. W pracy [12] analizowano trójwymiarowy model ogrzewania podłogowego z elektrycznymi panelami grzewczymi. Przeprowadzone tam badania dotyczyły określenia wpływu różnych materiałów, z których wykonano płytę podłogową i którymi ją pokryto, na rozkład nieustalonego pola temperatury na powierzchni podłogi oraz na całkowite zużycie energii elektrycznej. W symulacjach numerycznych wykorzystano jawną metodę różnic skończonych. Z kolei w pracy [13] przedstawiono analityczne rozwiązanie problemu modelowania dynamiki trójwymiarowego pola temperatury w jednowarstwowym układzie elektrycznego grzejnika podłogowego pracującego z regulatorem. Do rozwiązania zagadnienia zastosowano metody: superpozycji stanów (połączoną z rozdzieleniem zmiennych), uśrednionej stałej czasowej oraz superpozycji charakterystyk skokowych.

Ze względu na małą liczbę publikacji poświęconych modelowaniu układów ogrzewania podłogowego z uwzględnieniem trzech wymiarów, głównym celem niniejszej pracy jest przedstawienie numerycznej analizy nieustalonego pola termicznego w wielowarstwowym, trójwymiarowym modelu elektrycznego grzejnika podłogowego sterowanego regulatorem dwupołożeniowym. Dla przyjętego modelu sformulowano odpowiednie zagadnienie brzegowo-początkowe równania przewodnictwa cieplnego. Równanie to dyskretyzowano niejawną metodą różnic skończonych. Otrzymane układy równań rozwiązano metodą iteracyjną (BiCGStab)

z prekondycjonerem Jacobiego. Ze względu na dużą liczbę niewiadomych w rozwiązywanych układach równań, a tym samym i długi czas obliczeń numerycznych, drugim celem artykułu było skrócenie tego czasu. Cel ten osiągnięto poprzez dodatkowe wykorzystanie w obliczeniach procesora karty graficznej. Otrzymane wyniki obliczeń przedstawiono w postaci przebiegów i rozkładów pola temperatury.

Fizyczny i matematyczny model elektrycznego grzejnika podłogowego

Uproszczony model elektrycznie ogrzewanej podłogi przedstawia rysunek 1.



Rys.1. Trójwymiarowy model elektrycznie ogrzewanej podłogi: 1 - betonowe podłoże, 2 - izolacja cieplna, 3 - wylewka betonowa, 4 - kabel grzejny, 5 - czujnik temperatury

Zasadniczym elementem grzejnika podłogowego jest warstwa wylewki betonowej, w której umieszczony jest kabel grzejny. Kabel zazwyczaj ułożony jest w zygzak (meander) i mocowany do podłoża za pomocą taśmy lub siatki montażowej. Pod wylewką betonową znajduje się izolacja cieplna (np. utwardzony styropian). Izolacja ta ogranicza straty ciepła poprzez betonowe podłoże, które stanowi najniższą warstwę grzejnika podłogowego. Na zewnętrznych, pionowych krawędziach podłogi, stosuje się dodatkową izolację boczną zapobiegającą przenikaniu ciepła przez ściany pomieszczenia. Do regulacji temperatury stosowany jest termostat. Czujnik temperatury montowany jest pomiędzy dwoma odcinkami kabla grzejnego jak najbliższej górnej powierzchni wylewki betonowej.

Rozkład nieustalonego pola temperatury w grzejniku podłogowym opisuje trójwymiarowe równanie przewodnictwa cieplnego [22]:

$$(1) \quad \frac{\partial^2 T_i(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_i(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_i(x, y, z, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{\chi_i} \frac{\partial T_i(x, y, z, t)}{\partial t} = - \frac{g_i(x, y, z, t)}{\lambda_i}$$

W powyższym równaniu $T_i(x, y, z, t)$ jest rozkładem pola temperatury w i -tej warstwie grzejnika ($i = 1, 2, 3$), w punkcie o współrzędnych (x, y, z) i w chwili czasu t . Z kolei $g_i(x, y, z, t)$ oznacza objętościową wydajność źródeł ciepła (W/m^3), zaś χ_i jest dyfuzyjnością termiczną:

$$(2) \quad \chi_i = \frac{\lambda_i}{c_i \rho_i}$$

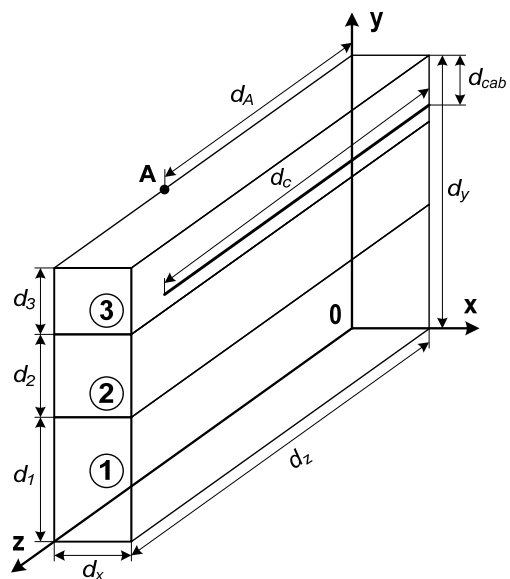
W analizowanym modelu grzejnika podłogowego przyjęto następujące założenia:

- właściwości materiałów, tj. przewodność cieplna (λ_i), ciepło właściwe (c_i) oraz gęstość masy (ρ_i), tworzących

kolejne warstwy grzejnika, mają stałe wartości (niezależne od temperatury),

- zewnętrzne, pionowe ściany podłogi (rys.1) są idealnie izolowane,
- zagięcia kabla grzejnego (oznaczone na rysunku 1 linią przerywaną) są pomijane, zaś liniowa gęstość wydzielanej mocy odpowiednio zwiększana, tak aby całkowita moc układu pozostała niezmienną,
- wszystkie odcinki kabla grzejnego są równoległe do siebie i mają jednakową długość,
- odległości pomiędzy sąsiadującymi odcinkami kabla są takie same,
- odległość pierwszego i ostatniego długiego odcinka kabla od krawędzi podłogi jest równa połowie odległości pomiędzy sąsiadującymi odcinkami kabla,
- początki i końce odcinków kabla znajdują się w takiej samej odległości od krawędzi podłogi.

Z powyższych założeń wynika, że rozkład pola temperatury jest powtarzalny w segmentach ograniczonych pionowymi płaszczyznami YZ znajdującymi się w połowie odległości pomiędzy długimi odcinkami kabla grzejnego. Jednocześnie, w każdym z tych segmentów, rozkład ten jest symetryczny względem pionowej płaszczyzny XY przechodzącej przez środek podłogi i pionowej płaszczyzny YZ przechodzącej przez miejsce położenia kabla grzejnego. Zatem analiza rozkładu pola temperatury może być zawężona tylko do segmentu zaznaczonego na rysunku 1 (zakreskowane pole). Rozpatrywany fragment grzejnika podłogowego przedstawia rysunek 2.



Rys.2. Analizowany segment elektrycznie ogrzewanej podłogi

Z przedstawionej powyżej analizy wynika, że na pionowych płaszczyznach ograniczających obszar pokazany na rysunku 2 nie ma wymiany ciepła. Opisują to następujące warunki:

$$(3a) \quad \left. \frac{\partial T_i(x, y, z, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad \text{dla } y \in \langle 0, d_y \rangle, z \in \langle 0, d_z \rangle, t \geq 0,$$

$$(3b) \quad \left. \frac{\partial T_i(x, y, z, t)}{\partial x} \right|_{x=d_x} = 0 \quad \text{dla } y \in \langle 0, d_y \rangle, z \in \langle 0, d_z \rangle, t \geq 0,$$

$$(3c) \quad \left. \frac{\partial T_i(x, y, z, t)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad \text{dla } x \in \langle 0, d_x \rangle, y \in \langle 0, d_y \rangle, t \geq 0,$$

$$(3d) \left. \frac{\partial T_i(x, y, z, t)}{\partial z} \right|_{z=d_z} = 0 \text{ dla } x \in \langle 0, d_x \rangle, y \in \langle 0, d_y \rangle, t \geq 0.$$

Prąd elektryczny przepływający przez kabel grzejny powoduje nagrzewanie się wylewki betonowej. Górna powierzchnia tej wylewki emituje ciepło do otoczenia przez konwekcję naturalną i promieniowanie. Zjawisko to opisuje warunek brzegowy III rodzaju (Hankela):

$$(4) -\lambda_3 \left. \frac{\partial T_3(x, y, z, t)}{\partial y} \right|_{y=d_y} = \alpha \cdot [T_3(x, y = d_y, z, t) - T_{amb}]$$

dla $x \in \langle 0, d_x \rangle, z \in \langle 0, d_z \rangle, t \geq 0,$

gdzie α jest całkowitym współczynnikiem przejmowania ciepła, zaś T_{amb} temperaturą w pomieszczeniu.

Na dolnej powierzchni betonowego podłoża założono stałą (niezmienną w czasie) temperaturę T_g , równą temperaturze gruntu:

$$(5) T_1(x, y = 0, z, t) = T_g \text{ dla } x \in \langle 0, d_x \rangle, z \in \langle 0, d_z \rangle, t \geq 0.$$

Na granicach materiałów (betonowe podłoże/izolacja cieplna oraz izolacja cieplna/wylewka betonowa) powinny być spełnione warunki ciągłości temperatury (6a,b) i strumienia ciepła (7a,b):

$$(6a) T_1(x, y = d_1, z, t) = T_2(x, y = d_1, z, t)$$

dla $x \in \langle 0, d_x \rangle, z \in \langle 0, d_z \rangle, t \geq 0,$

$$(6b) T_2(x, y = d_1 + d_2, z, t) = T_3(x, y = d_1 + d_2, z, t)$$

dla $x \in \langle 0, d_x \rangle, z \in \langle 0, d_z \rangle, t \geq 0,$

$$(7a) \lambda_1 \left. \frac{\partial T_1(x, y, z, t)}{\partial y} \right|_{y=d_1} = \lambda_2 \left. \frac{\partial T_2(x, y, z, t)}{\partial y} \right|_{y=d_1}$$

dla $x \in \langle 0, d_x \rangle, z \in \langle 0, d_z \rangle, t \geq 0,$

$$(7b) \lambda_2 \left. \frac{\partial T_2(x, y, z, t)}{\partial y} \right|_{y=d_1+d_2} = \lambda_3 \left. \frac{\partial T_3(x, y, z, t)}{\partial y} \right|_{y=d_1+d_2}$$

dla $x \in \langle 0, d_x \rangle, z \in \langle 0, d_z \rangle, t \geq 0.$

W rozpatrywanym modelu masa kabla grzejnego jest bardzo mała w porównaniu z masą betonu, z którego wykonana jest wylewka. Podobnie jest ze średnicą kabla, która jest niewielka w stosunku do przekroju poprzecznego grzejnika. Zatem w analizie można pominąć rozpatrywanie struktury kabla i pola temperatury w jego wnętrzu. Kabel grzejny modelowany jest małym otoczeniem V_{cab} (objętością kontrolną) jego osi. Położenie osi określają współrzędne: $x = d_x$ oraz $y = d_y - d_{cab}$ (rys.2), natomiast położenie odcinka kabla określa współrzędna $z \in \langle 0, d_z \rangle$. Otoczenie V_{cab} jest źródłem ciepła w rozpatrywanym układzie. W punktach należących do tego otoczenia objętościowa wydajność źródła ciepła wynosi zero. Pracą grzejnika steruje regulator dwupołożeniowy. Regulator współpracuje z czujnikiem temperatury umieszczonym w punkcie A ($x = 0, y = d_y, z = d_z$) na powierzchni podłogi (rys.2). Jeśli temperatura zmierzona przez czujnik osiągnie wartość T_{OFF} , to zasilanie kabla grzejnego jest przerywane. W takim przypadku objętościowa wydajność źródeł ciepła punktów należących do otoczenia kabla jest zerowana. Natomiast, gdy temperatura punktu położenia czujnika spadnie do T_{ON} , to zasilanie kabla jest włączane i wtedy objętościowa

wydajność źródeł ciepła punktów należących do otoczenia kabla jest równa stałej wartości g_{cab} .

W chwili $t = 0$ układ znajduje się w stanie ustalonym. Ponieważ temperatura w pomieszczeniu T_{amb} i temperatura gruntu T_g mają różne wartości, to konieczne jest wyznaczenie rozkładu pola temperatury $T_{ui}(x, y, z)$ w tym stanie przy wyłączonym zasilaniu kabla grzejnego. Rozkład ten opisuje trójwymiarowe równanie stacjonarnego przewodnictwa ciepła [22]:

$$(8) \frac{\partial^2 T_{ui}(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_{ui}(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_{ui}(x, y, z)}{\partial z^2} = 0.$$

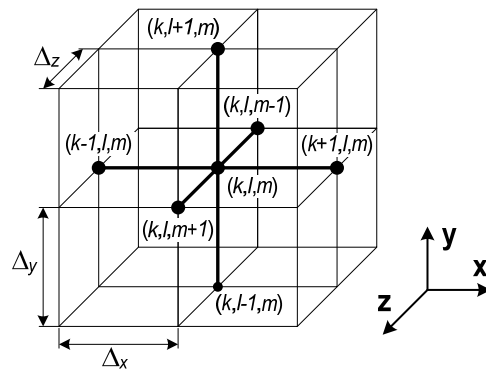
W równaniu (8) należy zastosować podobne warunki brzegowe (3)-(7) jak w przypadku równania (1). W warunkach tych należy zastąpić temperaturę $T_i(x, y, z, t)$ temperaturą $T_{ui}(x, y, z)$. Rozwiązując równanie (8) z odpowiednio zmienionymi warunkami brzegowymi (3)-(7) otrzymuje się rozkład temperatury w stanie ustalonym, który jest jednocześnie warunkiem początkowym równania (1):

$$(9) T_i(x, y, z, t = 0) = T_{ui}(x, y, z).$$

Równania (1)-(7) oraz (9) definiują zagadnienie brzegowo-początkowe. Rozwiązanie tego zagadnienia modeluje pracę trójwymiarowego elektrycznego grzejnika podłogowego z regulatorem dwupołożeniowym.

Dyskretyzacja modelu matematycznego

Do dyskretyzacji modelu matematycznego wykorzystano niejawną metodę różnic skończonych [22]. Analizowany segment elektrycznie ogrzewanej podłogi pokryto regularną siatką sześcienną. Sposób oznaczania kolejnych węzłów siatki pokazano na rysunku 3.



Rys.3. Siatka różnic skończonych

W trójwymiarowym równaniu przewodnictwa cieplnego (1) przestrzenne pochodne drugiego rzędu zastąpiono centralnymi ilorazami różnicowymi, zaś pochodną pierwszego rzędu po czasie przybliżono ilorazem różnicowym przednim. Zakładając taki sam rozmiar siatki różnic skończonych w kierunku wszystkich trzech osi ($\Delta x = \Delta y = \Delta z$) i dokonując niezbędnych przekształceń, otrzymano różnicową postać równania (1):

$$(10) (1 + 6Fo_i) T_{k,l,m}^{n+1} - Fo_i (T_{k+1,l,m}^{n+1} + T_{k-1,l,m}^{n+1} + T_{k,l+1,m}^{n+1} + T_{k,l-1,m}^{n+1} + T_{k,l,m+1}^{n+1} + T_{k,l,m-1}^{n+1}) = T_{k,l,m}^n + \frac{g_i (\Delta x)^2 Fo_i}{\lambda_i}$$

W powyższym równaniu indeks górny n określa numer kolejnego kroku po czasie, zaś indeksy dolne (k, l, m) oznaczają położenie węzła w siatce. Wartość liczby Fouriera Fo_i , występująca we wzorze (10), obliczana jest

oddzielnie dla każdej warstwy modelu grzejnika i wyraża się zależnością:

$$(11) \quad F_{O_i} = \frac{\chi_i \Delta t}{(\Delta x^2)},$$

gdzie Δt jest długością kroku po czasie.

Człon po znaku plus, występujący po prawej stronie równania (10), związany jest z modelowaniem numerycznym kabla grzejnego. Człon ten będzie przyjmował wartości różne od zera dla węzłów leżących na osi kabla. W pozostałych węzłach, występująca w nim objętościowa wydajność źródeł ciepła, będzie równa zero ($g_i = 0$). Z każdym węzłem leżącym na osi kabla związana jest objętość kontrolna V_{cab} , której wymiary wynikają ze skoku siatki różnic skończonych. Objętość ta jest połową sześcianu o boku Δx (gdyż $\Delta x = \Delta y = \Delta z$). Oś kabla przechodzi przez środek tego sześcianu. Objętościowa wydajność źródła ciepła odpowiadająca objętości kontrolnej wynosi:

$$(12) \quad g_{cab} = \frac{Q_{cab}}{\Delta x \cdot \Delta y},$$

gdzie Q_{cab} jest liniową gęstością wydzielanej mocy (W/m). Wielkość Q_{cab} jest jednym z podstawowych parametrów kabli grzejnych.

Równanie (10) pozwala wyznaczyć wartość temperatury tylko w węzłach leżących wewnątrz modelu grzejnika i mających 6 węzłów sąsiadujących. W przypadku węzłów znajdujących się na granicach analizowanego obszaru lub na granicy materiałów należy wyznaczyć nowe równania, które będą uwzględniały przyjęte warunki brzegowe. Do wyznaczenia powyższych równań zastosowano metodę bilansu energetycznego [22]. Otrzymano w ten sposób ponad 30 równań różnicowych wyrażonych odmiennymi wzorami.

Na dolnej powierzchni podłogi (płaszczyzna XZ, $y = 0$) wszystkie węzły mają stałą temperaturę T_g (temperatura gruntu).

Zapisując równania różnicowe dla wszystkich węzłów analizowanego obszaru otrzymuje się układ algebraicznych równań liniowych. Liczba równań tego układu wynosi $K \cdot (L-1) \cdot M$, gdzie K , L i M określają liczbę węzłów siatki różnic skończonych, odpowiednio, w kierunku osi X, Y i Z.

Do numerycznego rozwiązania otrzymanego w powyższy sposób układu konieczna jest znajomość rozkładu pola temperatury we wszystkich węzłach modelu w stanie ustalonym (przed włączeniem zasilania). Wymaga to zapisania równania (8) w postaci różnicowej. Podczas dyskretyzacji tego równania drugie pochodne przestrzenne zastąpiono centralnymi ilorazami różnicowymi. Po wykonaniu kilku prostych przekształceń otrzymano różnicową postać równania (8) dla węzłów znajdujących się wewnątrz modelu:

$$(13) \quad T_{k+1,l,m} + T_{k-1,l,m} + T_{k,l+1,m} + T_{k,l-1,m} + T_{k,l,m+1} + T_{k,l,m-1} - 6T_{k,l,m} = 0.$$

W przypadku węzłów leżących na granicach modelu lub na granicy materiałów wyznaczono nowe równania przy zastosowaniu metody bilansu energetycznego. Podobnie jak w przypadku równań dla stanu nieustalonego, także i tym razem otrzymano ponad 30 typów równań różnicowych.

Temperatura węzłów leżących na dole betonowego podłoża jest stała i równa temperaturze gruntu T_g .

Zapisując równania różnicowe dla stanu ustalonego otrzymuje się także układ $K \cdot (L-1) \cdot M$ algebraicznych równań

liniowych. Rozwiązanie tego układu jest warunkiem początkowym dla układu odnoszącego się do stanu nieustalonego.

Rozwiązanie numeryczne układu równań różnicowych

W wyniku dyskretyzacji analizowanego zagadnienia brzegowo-początkowego otrzymano dwa układy algebraicznych równań liniowych. Pierwszy układ służy do wyznaczenia rozkładu pola temperatury w stanie ustalonym (przy wyłączonym zasilaniu kabla grzejnego), zaś drugi układ - do wyznaczenia rozkładu pola temperatury w stanie nieustalonym. W celu numerycznego rozwiązania powyższych układów napisano program komputerowy w języku C++. W programie tym wykonywane są następujące operacje:

- odczytanie geometrii modelu, parametrów materiałowych oraz parametrów symulacji komputerowej,
- obliczenie zastępczej liniowej gęstości wydzielanej mocy w celu uwzględnienia pominięcia zagięć kabla grzejnego,
- pokrycie modelu siatką różnic skończonych,
- obliczenie wartości współczynników układu równań dla stanu ustalonego i układu równań dla stanu nieustalonego,
- wyznaczenie początkowego rozkładu pola temperatury w modelu grzejnika - jednokrotne rozwiązanie układu równań dla stanu ustalonego,
- wyznaczenie nieustalonego rozkładu pola temperatury w modelu grzejnika - wielokrotne rozwiązanie układu równań dla stanu nieustalonego (dla kolejnych chwil czasu),
- zapisanie wybranych rozkładów pola temperatury w pliku na dysku komputera.

Macierze współczynników w otrzymanych układach równań są niesymetryczne i mają bardzo małą liczbę niezerowych elementów (macierze rzadkie). Z powyższego względu do rozwiązania układów wybrano metodę iteracyjną - stabilizowaną metodę wzajemnie sprzężonych gradientów (BiCGStab) [26, 27]. W celu poprawienia zbieżności tej metody dodatkowo zastosowano prekondycjoner diagonalny (Jacobiego) [26, 27]. W komputerowej implementacji algorytmu metody BiCGStab w pamięci komputera zapisywane były tylko niezerowe elementy macierzy współczynników. Do przechowywania tych wartości zastosowano metodę CSR (Compressed Sparse Row) [26, 27]. W przypadku wektorów, wszystkie ich elementy (także zerowe) zapisywane były w pamięci komputera.

W programie komputerowym najwięcej czasu zajmuje rozwiązanie otrzymanych układów równań. W celu skrócenia tego czasu algorytm metody BiCGStab zaimplementowano na tradycyjnym procesorze (CPU) oraz procesorze karty graficznej (GPU). Wykorzystano środowisko CUDA przeznaczone dla procesorów graficznych firmy Nvidia oraz dostarczane wraz z nim biblioteki CUBLAS i CUSPARSE. Biblioteka CUBLAS zawiera implementacje funkcji BLAS przeznaczone dla macierzy gęstych, zaś biblioteka CUSPARSE - dla macierzy rzadkich. Wykorzystanie wspomnianych bibliotek zwalnia programistę z konieczności samodzielnej implementacji podstawowych operacji macierzowych na procesorze GPU (np. mnożenie macierzy przez wektor, obliczanie iloczynu skalarnego i norm wektorów).

Parametry modelu grzejnika i programu komputerowego

W analizowanym modelu elektrycznego grzejnika podłogowego przyjęto następujące jego wymiary (rys.1 i rys.2):

$$(14) \quad w_x = 3,08 \text{ m}, w_y = 0,33 \text{ m}, w_z = 4 \text{ m}, d_1 = 0,15 \text{ m}, \\ d_2 = 0,1 \text{ m}, d_3 = 0,08 \text{ m}, d_x = 0,07 \text{ m}, d_y = 0,33 \text{ m}, \\ d_z = 2 \text{ m}, d_{cab} = 0,06 \text{ m}, d_c = 1,86 \text{ m}, d_A = 1,5 \text{ m}.$$

W konstrukcji grzejnika założono, że wylewka i podłoże wykonane są z betonu o takich samych parametrach, zaś izolacja cieplna ze styropianu. Parametry materiałów występujących w modelu grzejnika zestawiono w tabeli 1.

Tabela 1. Właściwości materiałów występujących w modelu grzejnika podłogowego

Parametr	Oznaczenie [jednostka]	Materiał <i>i</i>	
		1, 3	2
Przewodność cieplna	λ_i [W/(m·K)]	1,0	0,04
Ciepło właściwe	c_i [J/(kg·K)]	840	1460
Gęstość masy	ρ_i [kg/m ³]	2000	20

W rozpatrywanym modelu przyjęto kabel grzejny o liniowej gęstości wydzielanej mocy $Q = 20$ W/m. Ze względu na pominięcie zagięć kabla moc ta została odpowiednio zwiększona, tak aby całkowita moc układu pozostała niezmienną. Dodatkowo założono, że straty ciepła przez pionowe ściany boczne modelu grzejnika i dolną powierzchnię betonowego podłoża wynoszą 10% całkowitej mocy układu. Z tego względu liniowa gęstość wydzielanej mocy została odpowiednio zmniejszona. Ostatecznie, zastępcza liniowa gęstość wydzielanej mocy wyniosła $Q_{cab} = 20,15$ W/m. Całkowity współczynnik przejmowania ciepła z górnej powierzchni wylewki betonowej miał wartość $\alpha = 9$ W/(m²K). W pomieszczeniu założono temperaturę $T_{amb} = 14$ °C, natomiast jako temperaturę gruntu przyjęto $T_g = 5$ °C. Regulator wyłączał zasilanie kabla grzejnego, gdy temperatura zmierzona przez czujnik osiągała wartość $T_{OFF} = 26,5$ °C. Zasilanie kabla było ponownie włączane, gdy temperatura punktu położenia czujnika spadała do $T_{ON} = 25,5$ °C.

Analizowany segment modelu grzejnika pokryty regularną siatką różnic skończonych. Zastosowano dwie gęstości siatki. W pierwszym przypadku skok siatki wyniósł $\Delta x = 0,005$ m, zaś w drugim przypadku $\Delta x = 0,0025$ m. W tabeli 2 zestawiono zastosowane siatki oraz charakterystykę odpowiadających im układów algebraicznych równań liniowych.

Tabela 2. Podział modelu grzejnika podłogowego i parametry układu równań

Skok siatki Δx [m]	Siatka	Liczba niewiadomych	Liczba niezerowych elementów macierzy
0,005	16×68×402	396 990	2 711 988
0,0025	32×136×804	3 066 228	21 198 018

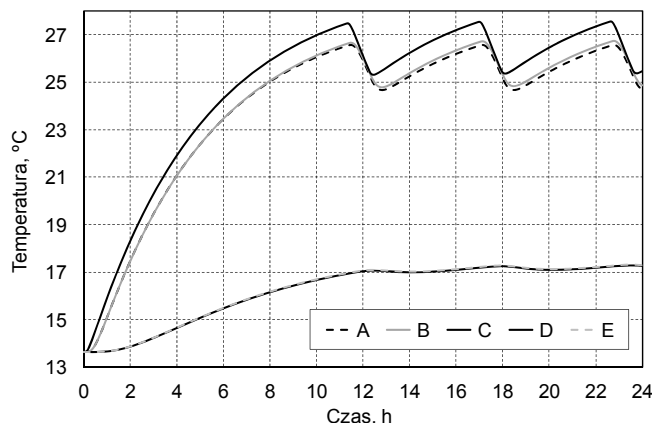
Analizowano niestacjonarne pole temperatury w ciągu 24 h od włączenia zasilania kabla grzejnego. Przy założonej długości kroku po czasie $\Delta t = 2$ s, dało to w sumie 43 200 kroków metody obliczeniowej.

Wszystkie obliczenia wykonano na komputerze klasy PC (procesor Intel Core i7-4930K 3,4 GHz, 16 GB RAM DDR3) i karcie graficznej Nvidia GeForce GTX 780Ti (1880 rdzeni CUDA, 3072 MB RAM GDDR5). Do napisania programu wykorzystano kompilator Microsoft Visual Studio Enterprise 2015 oraz współpracujące z nim środowisko CUDA w wersji 8.0.

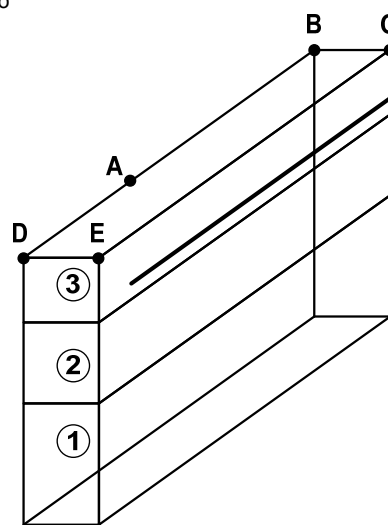
Wyniki obliczeń i ich interpretacja

W wyniku uruchomienia programu komputerowego otrzymano rozkład nieustalonego pola temperatury we wszystkich węzłach modelu elektrycznego grzejnika podłogowego. Na rysunku 4 przedstawiono otrzymane

przebiegi temperatury w wybranych jego punktach (A-E). Położenie tych punktów w modelu grzejnika przedstawia rysunek 5.



Rys.4. Temperatura w wybranych punktach (A-E) modelu grzejnika podłogowego

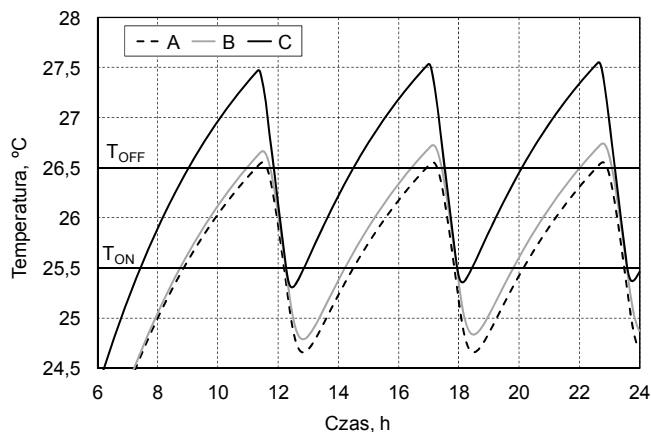


Rys.5. Położenie punktów A-E w modelu grzejnika

Analizując rysunek 4 można zauważyć, że „rozgrzewanie” grzejnika podłogowego (osiągnięcie temperatury pracy) zajmuje ok. 11 godzin. Po tym czasie pracą grzejnika steruje regulator. Na rysunku 4 wyraźnie widoczne są chwile włączania i wyłączania zasilania kabla grzejnego. Punkt A odpowiada miejscu umieszczenia czujnika temperatury. Przebieg temperatury w tym punkcie pozwala dokładnie prześledzić pracę regulatora temperatury. Punkty B i C położone są w połowie przekroju podłogi. Punkt B znajduje się w połowie odległości pomiędzy sąsiadującymi odcinkami kabla grzejnego, zaś punkt C - bezpośrednio nad kablem grzejnym. Temperatura punktu C jest najwyższa wśród wszystkich punktów powierzchni podłogi. W przypadku tego punktu występują także największe amplitudy oscylacji temperatury. Punkty D i E znajdują się na krawędzi podłogi. Przebiegi temperatury w tych punktach praktycznie pokrywają się (rys.4). Punkt D jest najbardziej oddalony od kabla grzejnego więc jego temperatura jest najniższa spośród wszystkich punktów na powierzchni podłogi.

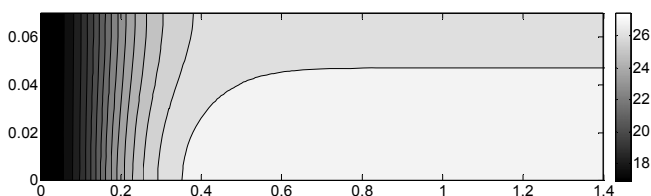
Praca regulatora temperatury pokazana jest na rysunku 6. Po uruchomieniu ogrzewania podłogowego następuje wzrost temperatury wszystkich jego punktów. Regulator wyłącza zasilanie kabla grzejnego, gdy temperatura punktu A osiągnie wartość T_{OFF} . Na rysunku 6 widoczny jest wtedy szybki spadek temperatury. Gdy temperatura zmierzona

przez czujnik spadnie do T_{ON} to regulator ponownie włącza zasilanie kabla. Jednakże wzrost temperatury obserwowany jest z opóźnieniem, gdyż strumień ciepła dociera do punktu A dopiero po pewnym czasie. Opisana sytuacja powtarza się dla każdego cyklu pracy regulatora.

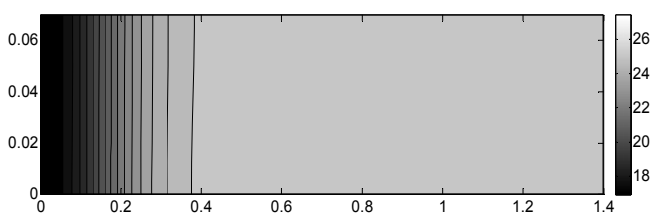


Rys.6. Praca regulatora temperatury

Na rysunkach 7a i 7b przedstawiono rozkłady pola temperatury na powierzchni podłogi (płaszczyzna XZ) dla dwóch wybranych chwil czasu, odpowiadających pierwszemu wyłączeniu zasilania kabla grzejnego i ponownemu jego włączeniu. Największe zmiany wartości temperatury można zaobserwować przy lewej krawędzi grzejnika. Przemierzając się w kierunku środka podłogi rozkład pola temperatury staje się równomierny. Na rysunku 7a można zauważyć, że temperatura nad kablem grzejnym jest najwyższa, natomiast przy lewej krawędzi podłogi mocno spada. Na rysunku 7b zasilanie kabla jest wyłączone więc rozkład temperatury w znacznej części powierzchni podłogi jest równomierny.

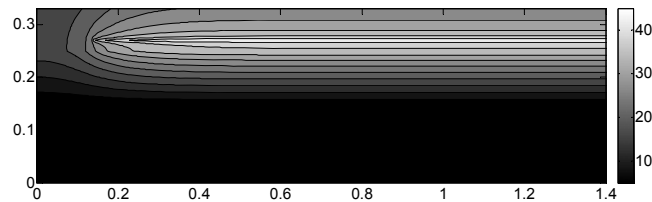


Rys.7a. Rozkład pola temperatury na powierzchni podłogi (płaszczyzna XZ) w chwili czasu $t = 11,26$ h (pierwsze wyłączenie zasilania kabla grzejnego)

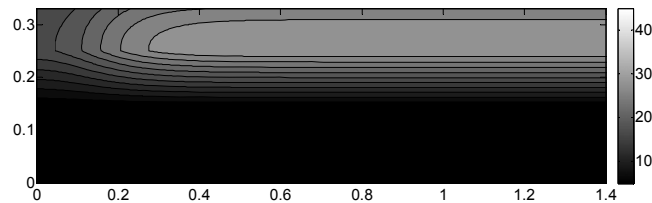


Rys.7b. Rozkład pola temperatury na powierzchni podłogi (płaszczyzna XZ) w chwili czasu $t = 12,19$ h (ponowne włączenie zasilania kabla grzejnego)

Na rysunkach 8a i 8b pokazano rozkład pola temperatury na płaszczyźnie YZ przechodzącej przez oś kabla grzejnego. Na rysunkach tych widoczne jest działanie izolacji cieplnej. Strumień ciepła nie przenika w dół podłogi więc temperatura w warstwie izolacji bardzo szybko spada. Na rysunku 8a dokładnie widać miejsce położenia kabla grzejnego (obszar o najwyższej temperaturze).



Rys.8a. Rozkład pola temperatury w przekroju podłogi (płaszczyzna YZ) w chwili czasu $t = 11,26$ h (pierwsze wyłączenie zasilania kabla grzejnego)



Rys.8b. Rozkład pola temperatury w przekroju podłogi (płaszczyzna YZ) w chwili czasu $t = 12,19$ h (ponowne włączenie zasilania kabla grzejnego)

Wydajność obliczeń wykonywanych na procesorach CPU i GPU

Oceniając wydajność obliczeń równoległych porównuje się czas wykonania programu wykorzystującego tylko tradycyjny procesor (CPU) z czasem wykonania programu, który wykorzystuje tradycyjny procesor (CPU) i procesor karty graficznej (GPU). Konieczne zatem było napisanie sekwencyjnej wersji programu rozwiązującego analizowane zagadnienie. W programie tym, tak jak w programie równoległym, do rozwiązania układu algebraicznych równań liniowych zastosowano metodę BiCGStab z prekondycjonerem Jacobiego. Do realizacji operacji na wektorach i macierzach zastosowano natomiast bibliotekę Intel Math Kernel Library (MKL) w wersji 10.3 [28]. Biblioteka ta zawiera procedury algebry liniowej (BLAS) specjalnie zoptymalizowane dla procesorów firmy Intel.

Obliczenia przeprowadzono dla dwóch gęstości siatek. Na podstawie otrzymanych czasów obliczeń wyznaczono przyspieszenie S . W przypadku zastosowania procesorów kart graficznych przyspieszenie to definiowane jest w następujący sposób [29]:

$$(15) \quad S = \frac{t_{CPU}}{t_{CPU+GPU}},$$

gdzie t_{CPU} jest czasem wykonania programu sekwencyjnego tylko na tradycyjnym procesorze (CPU), zaś $t_{CPU+GPU}$ jest czasem wykonania programu równoległego na tradycyjnym procesorze (CPU) i procesorze karty graficznej (GPU).

Otrzymane czasy obliczeń oraz wyznaczone przyspieszenia przedstawiono w tabeli 3.

Tabela 3. Czasy wykonywania programu i przyspieszenie obliczeń

Siatka	Czas obliczeń		Przyspieszenie
	t_{CPU} [s]	$t_{CPU+GPU}$ [s]	
16×68×402	906,885	307,247	2,947
32×136×804	12 247,138	2 401,532	5,100

Dodatkowe zastosowanie procesora GPU pozwoliło skrócić czas obliczeń w stosunku do obliczeń wykonywanych tylko na procesorze CPU. W przypadku siatki $16 \times 68 \times 402$ skrócono czas obliczeń prawie 3-krotnie (z ok. 15 minut do ok. 5 minut), zaś w przypadku siatki $32 \times 136 \times 804$ czas obliczeń został skrócony ponad 5-krotnie (z ok. 3,5 godziny do 40 minut). Większe przyspieszenia obliczeń w drugim przypadku wynika z dużo

większego rozmiaru otrzymanych układów algebraicznych równań liniowych. Pociąga to za sobą lepsze wykorzystanie mocy obliczeniowej procesora karty graficznej.

Uwagi końcowe

W artykule przedstawiono numeryczną analizę nieustalonego pola temperatury w trójwymiarowym, wielowarstwowym modelu elektrycznego grzejnika podłogowego sterowanego regulatorem dwupołożeniowym. W tym celu opracowano analityczny i numeryczny model elektrycznie ogrzewanej podłogi. Następnie sformułowano odpowiednie zagadnienie brzegowo początkowe, które dyskretyzowano niejawną metodą różnic skończonych. Otrzymane układy równań rozwiązano przy wykorzystaniu metody BiCGStab z prekondycjonerem Jacobiego. Napisano program komputerowy wykorzystujący w obliczeniach tradycyjny procesor oraz procesor karty graficznej. W wyniku uruchomienia programu otrzymano rozkłady nieustalonego pola temperatury w całym modelu elektrycznie ogrzewanej podłogi. Przedstawione w artykule przebiegi i rozkład temperatury potwierdzają zgodność otrzymanych wyników z fizyką analizowanych zjawisk. Zbadano wydajność opracowanego programu komputerowego. Dodatkowe zastosowanie procesora GPU pozwoliło na 3-krotne (rzadsza siatka) lub 5-krotne (gęstsza siatka) skrócenie czasu obliczeń. Wyniki te są porównywalne z wynikami prezentowanymi w innych publikacjach [30, 31]. Procesory kart graficznych mają największą wydajność, gdy obliczenia zmiennoprzecinkowe wykonywane są z pojedynczą precyzją. W opracowanym programie zastosowano podwójną precyzję, gdyż w przypadku pojedynczej precyzji pojawiły się problemy ze zbieżnością zastosowanej metody iteracyjnej.

Praca zrealizowana w ramach projektu badawczego Politechniki Białostockiej nr S/WE/2/2018.

Autorzy: dr inż. Jarosław Forenc, Politechnika Białostocka, Wydział Elektryczny, ul. Wiejska 45D, 15-351 Białystok, E-mail: j.forenc@pb.edu.pl.

LITERATURA

- [1] Grama A., Gupta A., Karypis G., Kumar V., *Introduction to Parallel Computing, Second Edition*, Addison Wesley, (2003).
- [2] Storti D., Yurtoglu M., *CUDA for Engineers: An Introduction to High-Performance Parallel Computing*, Addison-Wesley Professional, (2015).
- [3] Kirk D.B., Hwu W.W., *Programming Massively Parallel Processors: A Hands-on Approach, Third Edition*, Morgan Kaufmann, (2016).
- [4] Holopainen R., Tuomaala P., Piippo J., Uneven gridding of thermal nodal networks in floor heating simulations, *Energy and Buildings*, 39 (2007), No. 10, 1107-1114.
- [5] Watson R.D., Chapman K.S., *Radiant Heating & Cooling Handbook*, McGraw-Hill Companies, (2004).
- [6] Weitzmann P., Kragh J., Roots P., Svendsen S., Modelling floor heating systems using a validated two-dimensional ground-coupled numerical model, *Building and Environment*, 40 (2005), 153-163.
- [7] Sattari S., Farhanieh B., A parametric study on radiant floor heating system performance, *Renewable Energy*, 31 (2006), No. 10, 1617-1626.
- [8] Jin X., Zhang X., Luo Y., A calculation method for the floor surface temperature in radiant floor system, *Energy and Buildings*, 42 (2010), No. 10, 1753-1758.
- [9] Larsen S.F., Filippin C., Lesino G., Transient simulation of a storage floor with a heating/cooling parallel pipe system, *Building Simulation*, 3 (2010), No. 2, 105-115.
- [10] Liu Y., Wang D., Liu J., Study on heat transfer process for in-slab heating floor, *Building and Environment*, 54 (2012), 77-85.
- [11] Li Q., Chen Ch., Zhang Y., Lin J., Ling H., Ma Y., Analytical solution for heat transfer in a multilayer floor of a radiant floor system, *Building Simulation*, 7 (2014), No. 3, 207-216.
- [12] Chen Y., Athienitis A.K., Three-dimensional numerical investigation of the effect of cover materials on heat transfer in floor heating systems, *ASHRAE Transactions*, 104 (1998), No. 2, 1350-1355.
- [13] Gołębiowski J., Kwiećkowski S., Dynamics of three-dimensional temperature field in electrical system of floor heating, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 45 (2002), No. 12, 2611-2622.
- [14] Lin K., Zhang Y., Xu X., Di H., Yang R., Qin P., Modeling and simulation of under-floor electric heating system with shape-stabilized PCM plates, *Building and Environment*, 39 (2004), No. 12, 1427-1434.
- [15] Gołębiowski J., Forenc J., The influence of side thermal insulation on distribution of the temperature field in an electrical floor heater, *Przegląd Elektrotechniczny*, 92 (2016), No. 12, 271-277.
- [16] Howard B.D., The CMU air-core passive hybrid heat storage system, in: *Proceedings of the Renewable and Advanced Energy Systems for the 21st Century*, Lahaina, Maui, Hawaii, USA, (1999).
- [17] Bozkır O., Canbazoğlu S., Unsteady thermal performance analysis of a room with serial and parallel duct radiant floor heating system using hot airflow, *Energy and Buildings*, 36 (2004), No. 6, 579-586.
- [18] Gołębiowski J., Forenc J., Parallel computations of the step response of a floor heater with the use of a graphics processing unit. Part 1: Models and algorithms, *Bull. Pol. Ac.: Tech.*, 61 (2013), No. 4, 943-948.
- [19] Forenc J., GPU-based parallel method of temperature field analysis in a floor heater with a controller, *Open Engineering*, 6 (2016), No. 1, 152-163.
- [20] Lewis R.W., Nithiarasu P., Seetharamu K.N., *Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow*, John Wiley&Sons, (2004).
- [21] Reddy J.N., Gartling D.K., *The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics, Third Edition*, CRC Press, (2010).
- [22] Incropera F., De Witt D., Bergman T., Lavine A., *Introduction to Heat Transfer*, John Wiley&Sons, Hoboken, (2007).
- [23] Tveito A., Winther R., Introduction to Partial Differential Equations. A Computational Approach, *Texts in Applied Mathematics*, 29 (2005), Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- [24] Nowak A.J. (ed.), Numerical Methods in Heat Transfer, *International Studies in Science and Engineering*, 11, Papierflieger-Verlag, Clausthal-Zellerfeld, (2009).
- [25] Ibanez M.-T., Power H., *Advanced Boundary Elements for Heat Transfer. Topics in Engineering Vol. 42*, WIT Press, (2002).
- [26] Barrett R., Berry M., Chan T.F., Demmel J., Donato J.M., Dongarra J., Eijkhout V., Pozo R., Romine Ch., Van der Vorst H., *Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods*, SIAM, Philadelphia, (1994).
- [27] Saad Y., *Iterative Methods for Sparse Linear Systems, Second Edition*, SIAM, (2003).
- [28] Intel Math Kernel Library. Reference Manual, MKL 10.3 Update 10, Intel Corporation, (2012).
- [29] Jalili-Marandi V., Dinavahi V., SIMD-based large-scale transient stability simulation on the graphics processing unit, *IEEE Trans. on Power Systems*, 25 (2010), No. 3, 1589-1599.
- [30] Naumov M., Preconditioned Block-Iterative Methods on GPUs, *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, 12 (2012), No. 1, 11-14.
- [31] Haeri S., Shrimpton J.S., Fully resolved simulation of particle deposition and heat transfer in a differentially heated cavity, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 50 (2014), 1-15.