

## Zastosowanie rachunku niecałkowitego rzędu w obliczeniach gradientu pola skalarnego

**Streszczenie.** W artykule przedstawiono zastosowanie pochodnych ułamkowego rzędu do wyznaczania gradientu pola skalarnego, także przy zmianie układu współrzędnych. W naszych obliczeniach natężenie pola elektrycznego ładunku punktowego zostało wyznaczone na podstawie potencjału pola elektrycznego. Zbadano niektóre własności wyznaczonego gradientu.

**Abstract.** The paper presents the use of fractional-order derivatives for determining the scalar field gradient, also for the change of the coordinate system. In our calculations the electric field strength of the point charge was determined on the basis of the electric field potential. Some properties of the determined gradient were examined. (**Application of incomplete-order calculus in scalar field gradient calculations**).

**Słowa kluczowe:** pochodna niecałkowitego rzędu, pole skalarne, gradient, potencjał elektryczny.

**Keywords:** incomplete order derivative, scalar field, gradient, electric potential.

### Wstęp

Zastosowanie rachunku niecałkowitego rzędu do opisu rzeczywistych zjawisk czy procesów fizycznych coraz częściej pozwala na ich dokładniejszy opis [1,2]. Rosnące zainteresowanie tym rachunkiem jest motywowane wieloma zastosowaniami równań niecałkowitego rzędu w różnych dziedzinach badań. Jednak większość prac z tego zakresu koncentruje się na analizie równań i procesów w jednym wymiarze, niewiele jest prac dotyczących rachunku wektorów niecałkowitego rzędu i jego zastosowań w teorii pól elektromagnetycznych, dynamice płynów czy procesach wielowymiarowych. Próby sformułowania rachunku wektorów niecałkowitego rzędu podjęto w pracach [3 - 7]. Przedstawiono w nich ogólną definicję gradientu, dywergencji i rotacji w odniesieniu do pochodnych kierunkowych niecałkowitego rzędu. Do analizy fizycznych pól skalarnych często stosowana jest operacja różniczkowa zwana gradientem, która dla układów całkowitego rzędu gradient jest swego rodzaju odpowiednikiem zwykłych pochodnych dla funkcji wielu zmiennych [8, 9]. Wektor ten, jak wiadomo wskazuje kierunek największego wzrostu funkcji w danym punkcie, natomiast długość tego wektora opisuje wielkość tego wzrostu. W przytoczonych pracach autorzy przedstawili gradient niecałkowitego rzędu jest sumą ważoną ułamkowych pochodnych kierunkowych w każdym kierunku.

W teorii pola elektromagnetycznego relacje wiążące natężenie pola elektrycznego z potencjałem elektrycznym, przedstawiane są za pomocą operatora nabra – gradientu. W niniejszej pracy podjęto próbę wyznaczenia gradientu niecałkowitego rzędu, dla pól skalarnych na przykładzie obliczania natężenia pola elektrycznego powstałego od ładunku punktowego na podstawie potencjału tego pola. Nowością jest zastosowanie do wyznaczenia poszukiwanego rozwiązania funkcji Lommela należących do rodziny funkcji hipergeometrycznych.

### Gradient niecałkowitego rzędu

Obliczając w klasycznym przypadku, w układzie współrzędnych prostokątnych, natężenie pola elektrycznego od punktowego ładunku elektrycznego posługujemy się zależnościami:

$$(1) \quad \mathbf{E} = -\text{grad}\varphi$$

$$(2) \quad \varphi = \frac{1}{r} \cdot \frac{Q}{4\pi\epsilon} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}$$

Co daje:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left[ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \right]^{-1.5} \{ \mathbf{1}_x(x-x_0) + \mathbf{1}_y(y-y_0) \}$$

Zamieniając pochodne całkowitego rzędu występujące w definicji gradientu na pochodne niecałkowitego rzędu wg definicji Caputo:

$$(3) \quad {}_a^c D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-n)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau, n-1 \leq \alpha \leq n$$

Otrzymuje się:

$$(4) \quad \text{grad}_\alpha \varphi = \mathbf{1}_x \frac{1}{\sigma^{1-\alpha}} {}_a^c D_x^\alpha f(x, y) + \mathbf{1}_y \frac{1}{\sigma^{1-\alpha}} {}_a^c D_y^\alpha f(x, y)$$

gdzie:  $\sigma$  jest parametrem przyjętym dla zapewnienia spójności wymiarowej tzn.:

$$\left[ \frac{1}{\sigma^{1-\alpha}} \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \right] = \left[ \frac{d}{dx} \right]$$

czyli w tym przypadku  $\sigma = 1\text{m}$ . W dalszych wzorach parametr ten będzie pominięty.

Obliczając pochodną według (3) funkcji (2), której zależność od  $x$  i  $y$  jest analogiczna, otrzymano:

$$(5) \quad {}_a^c D_t^\alpha f(t) = \left[ \frac{t^{-\alpha}}{\sqrt{b}\Gamma(1-\alpha)} \cdot {}_2F_1\left(1, [0.5+0.5\alpha, 0.5\alpha], [0.5, 0.5], \frac{-b}{t^2}\right) - \frac{\sqrt{2}2^a t^{-\alpha}}{\pi t} \text{Sum} \right]$$

gdzie: dla pochodnej względem  $x$ , należy wstawić:  $t = x$  oraz  $b = y^2$ , a dla pochodnej względem  $y$ :  $t = y$ ,  $b = x^2$ , funkcja  ${}_2F_1(a, c, z)$  jest funkcją hipergeometryczną [6, 10], natomiast „Sum” oznacza sumę:

$$\begin{aligned}
Sum &= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ (-1)^{2k} [\pi \operatorname{tg}(k\pi) + \psi(1 + 0.5\alpha + k)] + \right. \\
&+ \pi \operatorname{ctg}(0.5\pi\alpha + k\pi) + \psi(0.5 + 0.5\alpha + k) - \pi \operatorname{tg}(0.5\pi\alpha + k\pi) + \\
(6) \quad &- 2\psi(1+k) + \ln\left(\frac{b}{t^2}\right) \left. \right\} \left(\frac{b}{t^2}\right)^k \sec(k\pi) \cos(0.5\pi\alpha + k\pi) \cdot \\
&\cdot \frac{\sin(0.5\pi\alpha + k\pi)}{2^{\alpha+2k-0.5}} \frac{(0.5\alpha + k)\Gamma(\alpha + 2k)}{\Gamma^2(1+k)} \Big\}
\end{aligned}$$

Występującą w równaniu (5) funkcję hipergeometryczną, definiuje się zazwyczaj jako rozwiązanie szerokiej klasy równań różniczkowych [7]. Można ją wyrazić następującym wzorem:

$${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k k!} x^k$$

gdzie:  $\alpha = 1$ ,  $\beta = \frac{1}{2}(\mu - \nu + 3)$ ,  $\gamma = \frac{1}{2}(\mu + \nu + 3)$ ,  $x = -\frac{1}{4}x^2$ ,

natomiast  $(a)_k$  jest symbolem Pochhammera określonym następującą regułą:

$$(a)_k = a(a+1)\dots(a+k-1) \text{ dla: } (a)_0 = 1, (a)_1 = a$$

Funkcja  $\psi$  w zależności (6) wyraża się całką lub pochodną następującej postaci:

$$(7) \quad \psi(z) = \int_0^{\infty} \left( \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}} \right) dt, \quad (\operatorname{Re}\{z\} > 0)$$

$$(8) \quad \psi(x) = \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x)$$

Skomplikowana postać funkcji podlegającej sumowaniu od  $k = 0$  do  $k = \infty$  utrudnia otrzymanie skończonej wartości tej sumy.

Stosując metodę klasyczną dużym ułatwieniem jest przejście do układu współrzędnych sferycznych, ale wówczas trzeba uwzględnić współczynniki metryki  $g_{ii}$  ( $i=1,2,3$ ) [11]. Dla takich współrzędnych w przestrzeni trójwymiarowej operator nabla rzędu  $\alpha$  (definicja Caputo) wynosi:

$$(9) \quad \nabla_{\alpha} = \mathbf{1}_r \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{1}_{\Theta} \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial}{\partial \Theta} + \mathbf{1}_{\varphi} \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
g_{11} &= ({}^c D_r^{\alpha} x)^2 + ({}^c D_r^{\alpha} y)^2 + ({}^c D_r^{\alpha} z)^2 \\
g_{22} &= ({}^c D_{\Theta}^{\alpha} x)^2 + ({}^c D_{\Theta}^{\alpha} y)^2 + ({}^c D_{\Theta}^{\alpha} z)^2, \\
g_{33} &= ({}^c D_{\varphi}^{\alpha} x)^2 + ({}^c D_{\varphi}^{\alpha} y)^2 + ({}^c D_{\varphi}^{\alpha} z)^2
\end{aligned}$$

$$x = r \sin \Theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \Theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \Theta$$

Obliczając współczynniki metryki otrzymano kolejno:

$$(10) \quad \begin{aligned}
g_{11} &= \frac{r^{2-2\alpha}}{(1-\alpha)^2 \Gamma^2(\alpha-1)} \\
g_{22} &= \frac{r^2}{\Gamma^2(\alpha-1)} \left[ 2 \left( \int_0^{\Theta} \frac{\cos \tau}{(\Theta-\tau)^{\alpha}} d\tau \right)^2 + \left( \int_0^{\Theta} \frac{\sin \tau}{(\Theta-\tau)^{\alpha}} d\tau \right)^2 \right] \\
g_{33} &= \frac{r^2 \sin^2 \Theta}{\Gamma^2(\alpha-1)} \left[ \left( \int_a^{\varphi} \frac{\sin \tau}{(\varphi-\tau)^{\alpha}} d\tau \right)^2 + \left( \int_a^{\varphi} \frac{\cos \tau}{(\varphi-\tau)^{\alpha}} d\tau \right)^2 \right]
\end{aligned}$$

Całki występujące w związku (10) mają postać  $\psi = (\varphi, \Theta)$

$$(11) \quad \begin{aligned}
\int_0^{\varphi} \frac{\sin \tau}{(\varphi-\tau)^{\alpha}} d\tau &= \frac{\psi^{-0.5} L2 - \psi^{0.5} \alpha L1}{(1-\alpha)} \\
\int_0^{\varphi} \frac{\cos \tau}{(\varphi-\tau)^{\alpha}} d\tau &= \frac{\psi^{1-\alpha} (1 - \psi^{\alpha-0.5} L2)}{(1-\alpha)}
\end{aligned}$$

gdzie: L1, L2 oznaczają funkcje Lommela z rodziny funkcji hipergeometrycznych i wynoszą [12, 13]:

$$(12) \quad \begin{aligned}
L1 &= \frac{\psi^{1.5-\alpha}}{-\alpha(3-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(1)_k (1-0.5\alpha)_k \psi^{2k}}{(2.5-0.5\alpha)_k 4^k k!} \\
L2 &= \frac{\psi^{2.5-\alpha}}{(2-\alpha)(3-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(1)_k (2-0.5\alpha)_k \psi^{2k}}{(2.5-0.5\alpha)_k 4^k k!}
\end{aligned}$$

Funkcję Lommela określa definicja [6]:

$$(13) \quad \begin{aligned}
LommelS1(\mu, \nu, x) &= s_{\mu\nu}(x) = \frac{x^{\mu+1}}{(\mu-\nu+1) \cdot (\mu+\nu+1)} \cdot \\
&\cdot {}_2F_1\left(1, \frac{1}{2}(\mu-\nu+3), \frac{1}{2}(\mu+\nu+3), -\frac{1}{4}x^2\right)
\end{aligned}$$

Dla przestrzeni dwuwymiarowej, we współrzędnych biegunowych, współczynniki metryki będą równe:

$$(14) \quad g_{11} = ({}^c D_r^{\alpha} x)^2 + ({}^c D_r^{\alpha} y)^2, \quad g_{22} = ({}^c D_{\varphi}^{\alpha} x)^2 + ({}^c D_{\varphi}^{\alpha} y)^2$$

i wówczas operator nabla we współrzędnych biegunowych wyrażać się będzie następująco:

$$(15) \quad \nabla_{\alpha} = \mathbf{1}_r \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} {}^c D_r^{\alpha} + \mathbf{1}_{\varphi} \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} {}^c D_{\varphi}^{\alpha}$$

Potencjał od ładunku punktowego jest funkcją tylko jednej zmiennej  $r$ , wobec tego natężenie pola elektrycznego dla pochodnych niecałkowitego rzędu otrzyma postać:

$$(16) \quad \mathbf{E}_{\alpha} = -\nabla_{\alpha} \phi(r) = \mathbf{1}_r \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} {}^c D_r^{\alpha} \phi(r)$$

Występująca w równaniu (16) funkcja  $\phi(r)$  jest proporcjonalna do funkcji  $1/r - (2)$ , zatem jej pochodna niecałkowitego rzędu dla  $0 \leq \alpha \leq 1$  wg definicji (17)

$$(17) \quad {}^c D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-n)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau$$

Wynosi kolejno:

$$(18) \quad \begin{aligned}
{}^c D_x^{\alpha} \left( \frac{1}{r} \right) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^r \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{1}{\tau} \right) (r-\tau)^{\alpha} d\tau \\
{}^c D_y^{\alpha} f(x, y) &= \frac{-1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^r \frac{1}{\tau^2 (r-\tau)^{\alpha}} d\tau \\
{}^c D_y^{\alpha} f(x, y) &= \frac{-1}{\Gamma(\alpha-1)} \left[ -\frac{(r-t)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)r^2} \right]_0^r = \\
&= \frac{-1}{\Gamma(\alpha-1)} \left[ 0 - \frac{r^{1-\alpha}}{(1-\alpha)r^2} \right] = \frac{-1}{(1-\alpha)\Gamma(\alpha-1)} \left( \frac{1}{r^{1+\alpha}} \right)
\end{aligned}$$

Wyniki obliczeń dla pochodnej funkcji  $1/r$  dla rzędu  $0 \leq \alpha \leq 1$  przedstawiono na rysunku 1.

Dla pochodnej rzędu  $1 \leq \alpha \leq 2$  otrzymuje się kolejno:

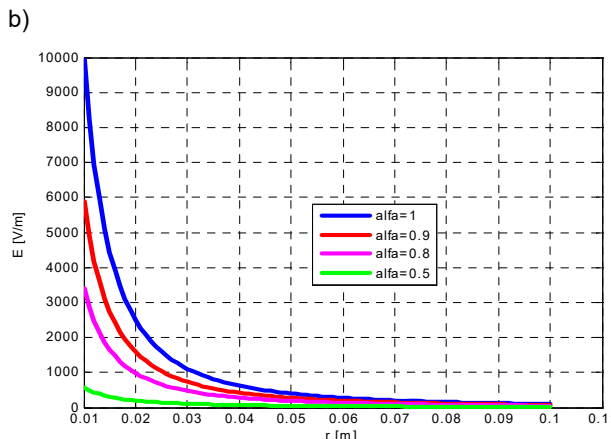
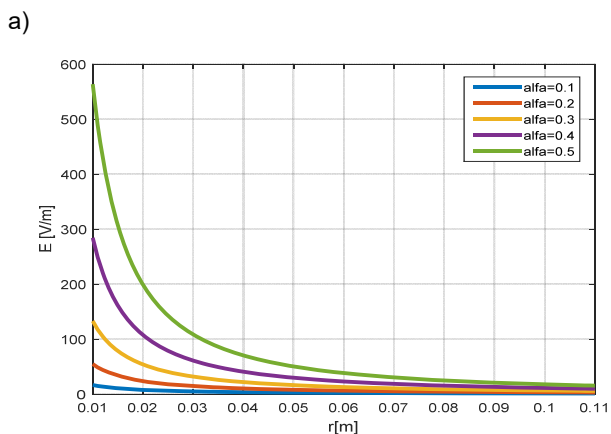
$$(19) \quad \begin{aligned}
{}^c D_x^{\alpha} \left( \frac{1}{r} \right) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-2)} \int_0^r \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left( \frac{1}{\tau} \right) (r-\tau)^{\alpha-1} d\tau \\
{}^c D_y^{\alpha} f(x, y) &= \frac{2}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^r \frac{1}{\tau^3 (r-\tau)^{\alpha-1}} d\tau
\end{aligned}$$

Obliczenie całki występującej w powyższych równaniach, dla dowolnego  $\alpha$  podanego przedziału, wymaga zastosowania specjalnych funkcji z rodziny funkcji hipergeometrycznych [14, 15]. Natomiast względnie prostą postać przyjmuje dla  $\alpha = 1,5$ , dla którego otrzymano:

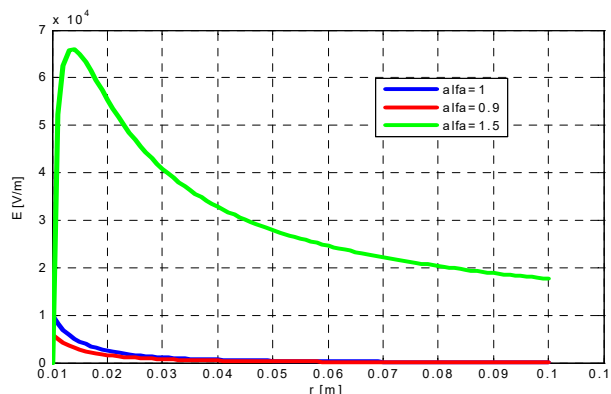
$$(20) \quad {}_0^c D_r^{1.5} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{2}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^r \frac{1}{\tau^3 (r-\tau)^{\alpha-1}} d\tau =$$

$$= \frac{2}{4\Gamma(\alpha-1)r^{5/2}} \left( 2000r^{3/2} \sqrt{100r-1} + 30\sqrt{r} \sqrt{100r-1} + 3 \operatorname{arcth} \frac{\sqrt{100r-1}}{10\sqrt{r}} \right)$$

Wyniki obliczeń dla pochodnej funkcji  $1/r$  dla rzędu  $1 \leq \alpha \leq 2$  przedstawiono na rysunku 2.



Rys.1. Wartości pochodnej funkcji  $1/r$  proporcjonalnej do natężenia pola elektrycznego dla rzędów: a)  $0 \leq \alpha \leq 0.5$ , b)  $0.5 \leq \alpha \leq 1$



Rys.2. Wartości pochodnej funkcji  $1/r$  dla rzędu  $1 \leq \alpha \leq 2$  proporcjonalnej do natężenia pola elektrycznego

Obliczając współczynnik metryki  $g_{11}$  wg (9) otrzymuje się kolejno:

$$(21) \quad {}_0^c D_r^\alpha [r \cos \phi] = \frac{\cos \phi}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^r \frac{1}{(r-\tau)^\alpha} d\tau$$

$${}_0^c D_r^\alpha [r \sin \phi] = \frac{\sin \phi}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^r \frac{1}{(r-\tau)^\alpha} d\tau$$

a ponieważ:

$$(22) \quad \int_0^r \frac{1}{(r-\tau)^\alpha} d\tau = \frac{r^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

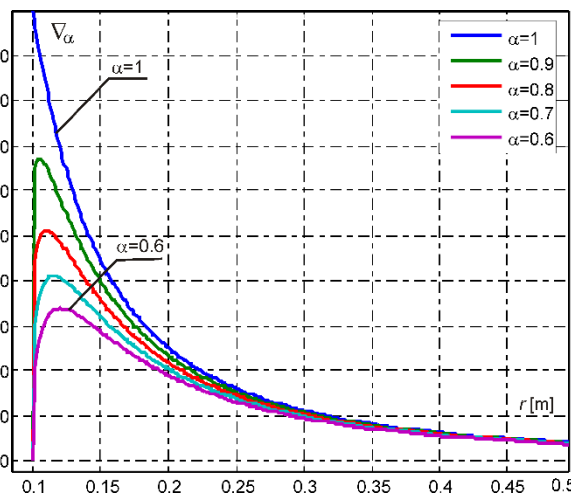
to ostatecznie współczynnik metryki  $g_{11}$  wyraża się związkami:

$$(23) \quad g_{11} = \frac{r^{2-2\alpha}}{(1-\alpha)^2 \Gamma^2(\alpha-1)}$$

Zatem natężenie pola elektrycznego dla pochodnych niecałkowitego rzędu ma postać:

$$(24) \quad \mathbf{E}_\alpha = \mathbf{1}_r \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left( \frac{(r-a)^{1-\alpha}}{r^{3-\alpha}} \right)$$

Aby porównać natężenie pola elektrycznego obliczonego na podstawie klasycznego gradientu z natężeniem otrzymanym przy zastosowaniu pochodnych niecałkowitego rzędu, przeprowadzono symulację w celu obliczenia natężenia pola pochodzące od ładunku punkowego  $Q$  umieszczonego w różnych odległościach  $r$  od punktu obserwacji. Uzyskane wyniki, otrzymane metodą klasyczną, porównano z wynikami otrzymanymi dla gradientu obliczonego na podstawie pochodnych niecałkowitego rzędu i przedstawiono na rysunku 3.



Rys.3. Wartości gradientu w zależności od rzędu pochodnej -  $\alpha$ .

Na podstawie rysunku 3 można stwierdzić, że wartość gradientu niecałkowitego rzędu jest mniejsza od gradientu klasycznego, zależy od rzędu  $\alpha$  pochodnej a różnica ta maleje wraz ze wzrostem odległości.

## WNIOSKI

W pracy przedstawiono wyznaczenie gradientu niecałkowitego rzędu, dla pól skalarnych. Pochodne całkowitego rzędu występujące w definicji gradientu zamieniono na pochodne niecałkowitego rzędu wg definicji Caputo. Do wyznaczenia poszukiwanego rozwiązania

zastosowano funkcje Lommela z rodziny funkcji hipergeometrycznych. Funkcje te wyrażają się w postaci szeregów potęgowych ze względu na zmienną  $t$ , co jest o tyle istotne, że łatwo jest prowadzić operacje różniczkowania i całkowania a co za tym idzie można wyznaczyć pochodną niecałkowitego rzędu z dowolnego przedziału  $k-1 < \alpha < k$  dla dowolnego całkowitego  $k$ .

Wyznaczenie gradientu niecałkowitego rzędu, dla pól skalarnych na przykładzie obliczania natężenia pola elektrycznego powstałego od ładunku punktowego na podstawie potencjału tego pola wykazało, że w stosunku do gradientu klasycznego zmniejsza się jego wartość w zależności od odległości ładunku do punktu obserwacji. Ponadto zmiana układu współrzędnych wymaga wyznaczenia współczynników metryki dla pochodnych niecałkowitego rzędu.

**Autorzy:**

*dr hab. inż. Maciej Włodarczyk – prof. PŚk, Katedra Informatyki, Elektroniki i Elektrotechniki, Wydział Elektrotechniki, Automatyki i Informatyki, Politechnika Świętokrzyska w Kielcach, 25-314 Kielce, al. Tysiąclecia Państwa Polskiego 7, Poland; e-mail: [m.wlodarczyk@tu.kielce.pl](mailto:m.wlodarczyk@tu.kielce.pl).*

*dr hab. inż. Andrzej Zawadzki – prof. PŚk, Katedra Urządzeń Elektrycznych i Automatyki, Wydział Elektrotechniki, Automatyki i Informatyki, Politechnika Świętokrzyska w Kielcach, 25-314 Kielce, al. Tysiąclecia Państwa Polskiego 7, Poland; e-mail: [a.zawadzki@tu.kielce.pl](mailto:a.zawadzki@tu.kielce.pl).*

*dr hab. inż. Sebastian Różowicz – prof. PŚk, Katedra Urządzeń Elektrycznych i Automatyki, Wydział Elektrotechniki, Automatyki i Informatyki, Politechnika Świętokrzyska w Kielcach, 25-314 Kielce, al. Tysiąclecia Państwa Polskiego 7, Poland; e-mail: [s.rozowicz@tu.kielce.pl](mailto:s.rozowicz@tu.kielce.pl).*

LITERATURA

- [1]. Kaczorek T.: Selected problems of fractional systems theory, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg 2011.
- [2]. Podlubny I. Fractional Differential Equations. Academic Press, San Diego 1999.
- [3]. F. Ben Adda, The differentiability in fractional calculus, Nonlinear Anal., 47, 5423{5428, (2001).
- [4]. Różowicz S., Zawadzki A., Włodarczyk M., Różowicz A, Mazur D.; .Assessment of the impact of per unit parameters errors on wave and output parameters in a transmission line; Selected Issues of Electrical Engineering, Electronics and Mechatronics Energies 2021, 14(21), 7440; doi.org/10.3390/en14217440; [www.mdpi.com/1996-1073/14/21/7440](http://www.mdpi.com/1996-1073/14/21/7440)
- [5]. M.M. Meerschaert, J. Mortensen, and H.P. Scheer. Vector Grunwald formula for fractional derivatives. Frac. Calc. Appl. Anal., 7:61{81, (2004).
- [6]. V.E. Tarasov, Fractional vector calculus and fractional Maxwell's equations, Annals of Physics., 323.(11), 2756{2778, (2008)
- [7]. M.M. Meerschaert, J. Mortensen, and S.W. Wheatcraft. Fractional vector calculus for fractional advection-dispersion. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 367:181{190, (2006).
- [8]. Różowicz S., Zawadzki A., Włodarczyk M., Różowicz A.; Modeling of Internal Combustion Engine Ignition Systems with a Circuit Containing Fractional-Order Elements; Energies 2022, 15(1), 337; doi.org/10.3390/en15010337
- [9]. Abramowitz M. and Stegun I.A. Handbook of Mathematical Functions. National Bureau of Standards. Applied Math. Series #55. Dover Publications, 1965.
- [10]. Moon P., Spencer D.E: Teoria pola, PWN, W-wa 1966
- [11]. Paszkowski S. Zastosowania numeryczne wielomianów i szeregów Czebyszewa, PWN, Warszawa 1975.
- [12]. Ryżyk I.M., Gradsztejn I.S. Tablice całek, sum, szeregów i iloczynów, PWN, Warszawa 1964:
- [13]. Włodarczyk M., Zawadzki A. The application of hypergeometric functions to computing fractional order derivatives of sinusoidal functions. Bulletin of the Polish Academy of Sciences-Technical Sciences. Vol. 64, No. 1, pp. 243-248, 2016, ISSN: 0239-7528, DOI: 10.1515/bpasts-2016-0026.
- [14]. Różowicz S., Zawadzki A., Włodarczyk M., Wachta H., Baran K.: Properties of fractional-order magnetic coupling Energies MDPI; Energie 2020 , 13, 1539; ISSN 1996-1073; doi:10.3390/en13071539.