

Dedukcyjna definicja błędu jako podstawa matematycznego modelowania procesu pomiaru

Streszczenie. Przedstawiona w artykule koncepcja modelowania procesu pomiaru bazuje na definicji błędu wywodzącej się z analizy pomiaru przy użyciu wzorca o strukturze kwantowej. Definicja jest podstawą tworzenia modelu pojedynczego wyniku pomiaru umożliwiające wyznaczenie przedziału reprezentującego mierzand po wykonaniu jego pomiaru. Przedział ten uzyskiwany jest przez złożenie wyniku pomiaru i przedziału niepewności.

Abstract. A conception of measurement process modeling based on an error definition which comes from analysis of a measurement performed with using a standard with a quantum structure is presented in the paper. The definition is a base of creation of a single measurement result model which enables determination of an interval representing a measurand after its measuring. The interval is building by composition of a measurement result and an uncertainty interval. (**Deductive error definition as the basis of mathematical modeling of measurement process**).

Słowa kluczowe: pomiar, mierzand, błąd pomiaru, niepewność.

Keywords: measurement, measurand, measurement error, uncertainty

Wstęp

Modelowanie procesu pomiaru rozumiane jest jako dostarczaniu środków matematycznych do kompleksowego i spójnego opisu wielkości mierzonej, wyniku jej pomiaru i czynników wpływających na dokładność tego procesu. Opis związków między wielkościami występującymi w tym procesie tworzy model pomiaru. Zgodnie przewodnikiem [7] wartość wielkości mierzonej (mierzandu [8]) jest tożsama z jej wartością prawdziwą (rzeczywistą). Zatem pomiar można określić jako eksperyment fizyczny mający na celu uzyskanie wyniku pomiaru, który jest liczbą możliwie najbliższą rzeczywistej wartości wielkości mierzonej. Ze względu na czynniki losowe, w danych warunkach pomiarowych możliwych do uzyskania jest wiele wyników. Można wówczas powiedzieć, że pojedynczy wynik pomiaru jest realizacją zmiennej losowej opisującej populację potencjalnych wyników. Różnica między wartością wielkości mierzonej a wynikiem pomiaru opisywana jest jako błąd całkowity wyniku pomiaru, na który składają się błędy cząstkowe opisujące oddziaływanie poszczególnych wielkości wpływających na wynik pomiaru.

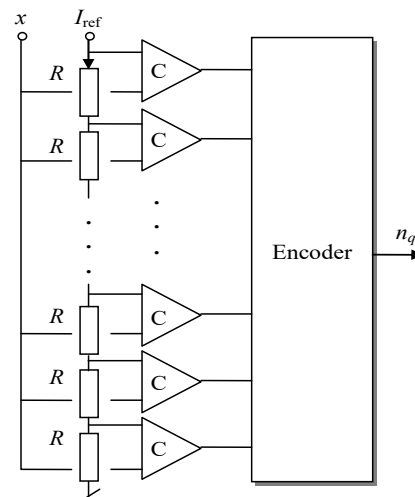
Końcowym działaniem w procesie pomiaru jest określenie rozbieżności między wartością wielkości mierzonej a wynikiem pomiaru. Powszechnie do tego celu stosuje się przedział obejmujący liczby rzeczywiste i reprezentujący wielkość mierzand [6], [7], nazywany tu przedziałem mierzandu, wyznaczany na podstawie wyniku pomiaru i opisu błędu całkowitego. Błąd całkowity jest traktowany jako losowy, zatem granice przedziału mierzandu opisywane są w kategoriach probabilistycznych. Oznacza to, że błędy cząstkowe rozpatrywane są również jako losowe [2], [3].

Przyjmuje się, że wynik pomiaru pozbawiony jest błędów o stałych wartościach, które są eliminowane z wyniku za pomocą poprawek [6]. Wynik niepoprawiony nazywany jest surowym. W probabilistycznym opisie błędów poprawki są traktowane jako wartości oczekiwane rozkładów błędów.

Dedukcyjna definicja błędu pomiaru

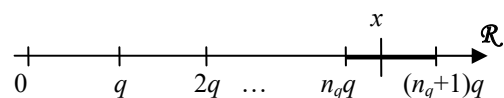
U podstaw aparatu matematycznego opisanego w artykule leży definicja błędu nazywana dedukcyjną, gdyż wywodzi się ona z analizy procesu pomiaru przy użyciu wzorca o strukturze kwantowej (ziarnistej). Tego rodzaju wzorce stosowane są głównie w przetwornikach analogowo-cyfrowych. Dla celów analizy wybrano

przetwornik typu „flash”, pokazany na rysunku 1, ze względu na prostotę jego konstrukcji.



Rys. 1. Schemat przetwornika A/C typu „flash” [1]

Przetwornik A/C realizuje pomiar na zasadzie kwantowania, czyli przez porównanie wielkości mierzonej z wzorcem składającym się kwantów, które są elementarnymi wzorcami o jednakowych wartościach znacznie mniejszych od zakresu pomiarowego przetwornika. W przypadku rozpatrywanego przetwornika A/C kwant jest spadkiem napięcia na rezystorze wzorcowym R na skutek przepływu stabilnego prądu odniesienia I_{ref} . Zespół komparatorów C porównuje napięcie mierzone x ze zbiorem kwantów, a wynik porównania wyprowadzany jest na wyjście przetwornika jako liczba n_q kwantów przyporządkowana wartości wielkości mierzonej. Efekt tego przyporządkowania można przedstawić w postaci graficznej jak na rysunku 2.



Rys. 2. Graficzna interpretacja napięcia x w postaci przedziału określonego przez wskazanie n_q przetwornika A/C z rysunku 1 [1]

Z rysunku 2 wynika, że nieznaną wartość rzeczywistą napięcia mierzonego x może być opisana za pomocą przedziału utworzonego w dziedzinie liczb rzeczywistych \mathbb{R} i określonego przez wskazanie n_q oraz wartość kwantu q zgodnie z zależnością:

$$(1) \quad n_q q < x \leq (n_q + 1)q,$$

która może być zapisana jako:

$$(2) \quad 0 < x - n_q q \leq q.$$

Iloczyn:

$$(3) \quad \tilde{x} = n_q q$$

stanowi surowy wynik pomiaru napięcia za pomocą przykładowego przetwornika A/C. Po jego wprowadzeniu do wyrażenia (2) uzyskuje się:

$$(4) \quad 0 < x - \tilde{x} \leq q.$$

Nierówność (4) określa granice błędu kwantowania wyniku surowego. Zgodnie z (4) błąd ten ma postać:

$$(5) \quad \tilde{e}_q = x - \tilde{x},$$

czyli jest on różnicą między nieznaną wartością wielkości poddawanej pomiarowi a wartością wielkości odniesienia [8], którą w tym przypadku jest surowy wynik pomiaru.

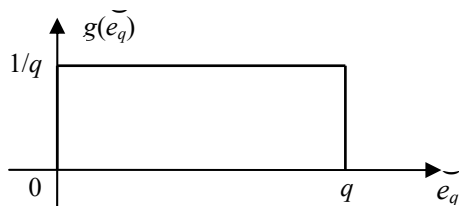
Wynik pomiaru wykonanego za pomocą przetwornika A/C z rysunku 1 można opisać analitycznie jako:

$$(6) \quad \tilde{x} = qn_q = q \text{ent} \left(\frac{x}{q} \right).$$

gdzie symbolem ent oznaczono funkcję *entier*, której wartość jest równa części całkowitej argumentu. Błąd kwantowania zgodnie z (5) opisuje wówczas równanie:

$$(7) \quad \tilde{e}_q = x - q \text{ent} \left(\frac{x}{q} \right).$$

Wyrażenie (7) umożliwia uzyskanie probabilistycznego opisu błędu kwantowania zarówno w sposób analityczny, jak i przy użyciu metody Monte Carlo [1]. Przy założeniu, że wartości napięcia mierzonego są jednakowo prawdopodobne w całym zakresie pomiarowym przetwornika A/C, uzyskuje się funkcję gęstości prawdopodobieństwa błędu pokazaną na rysunku 3.



Rys. 3. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa błędu kwantowania uzyskana przy zastosowaniu definicji błędu wyniku surowego (5)

Błąd o rozkładzie przedstawionym na rysunku 3 zawiera składową systematyczną, którą można wyznaczyć jako wartość oczekiwaną rozkładu błędu:

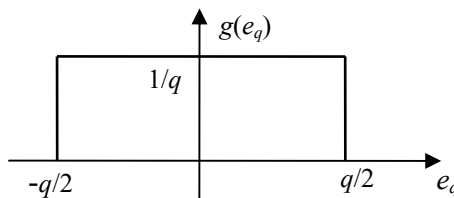
$$(8) \quad E(\tilde{e}_q) = \int_0^q g(\tilde{e}_q) \tilde{e}_q d\tilde{e}_q = \int_0^q \frac{1}{q} \tilde{e}_q d\tilde{e}_q = \frac{q}{2}.$$

Po wyeliminowaniu tej składowej systematycznej z rozkładu błędu kwantowania przez odjęcie wartości oczekiwanej od każdej realizacji błędu, uzyskuje się symetryczną funkcję gęstości prawdopodobieństwa pokazaną na rysunku 4. Zgodnie ze wzorem (5), eliminacja tej składowej jest równoważna korekcji wyniku surowego (6) przez dodanie do niego poprawki równej wartości oczekiwanej błędu zgodnie z zależnością:

$$\hat{x} = \tilde{x} + E(\tilde{e}_q) = q \text{ent} \left(\frac{x}{q} \right) + \frac{q}{2} = q \left[\text{ent} \left(\frac{x}{q} \right) + \frac{1}{2} \right].$$

(9)

gdzie \hat{x} oznacza ogólnie wynik pomiaru z usuniętymi wszystkimi składowymi o charakterze systematycznym. Z zależności (9) wynika, że poprawkę można również wprowadzać dodając wartość 0,5 do wskazania przetwornika A/C.



Rys. 4. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa błędu kwantowania po wyeliminowaniu składowej systematycznej

Wprowadzając do wzoru (5) poprawiony wynik pomiaru w miejsce surowego otrzymuje się dedukcyjną definicję błędu:

$$(10) \quad e = x - \hat{x}.$$

która jest podstawą budowania aparatu matematycznego opisanego w dalszej części artykułu. Punktem wyjścia rozważań jest przekształcenie zależności (10) do modelu pojedynczego wyniku pomiaru w postaci równania:

$$(11) \quad x = \hat{x} + e,$$

zgodnie z którym każda para składająca się z realizacją wyniku pomiaru i błędem różni się o stałą wartość równą rzeczywistej wartości wielkości mierzonej. Oznacza to, że rozkład potencjalnych wyników pomiaru wokół tej wartości może być określony na podstawie rozkładu błędu całkowitego e . W przypadku błędu o rozkładzie symetrycznym jak na rysunku 4, obydwa te rozkłady różnią się jedynie wartością oczekiwaną.

Model wyniku pomiaru w postaci (11) dopełnia równanie błędów opisujące związki między błędem całkowitym a cząstkowymi błędami pomiaru. Z analiz przedstawionych w pracy [1] wynika, że błąd całkowity można opisać jako sumę I błędów cząstkowych:

$$(12) \quad e = e_1 + e_2 + \dots + e_I,$$

których ewentualna współzależność określana jest przez współczynniki korelacji.

Wykorzystanie dedukcyjnej definicji błędu do wyznaczenia przedziału niepewności

Zgodnie z przyjętą definicją przedziału mierzand, przedział niepewności jest zbiorem liczb rzeczywistych, takim, dla którego prawdopodobieństwo \Pr wystąpienia w nim rzeczywistej wartości wielkości mierzonej w relacji do wyniku pomiaru \hat{x} wynosi p , co można zapisać jako:

$$(13) \quad \Pr[\underline{u} \leq (x - \hat{x}) \leq \bar{u}] = p$$

gdzie \underline{u} jest dolną, a \bar{u} górną granicą przedziału niepewności.

We wzorze (13) różnica w nawiasie jest definiowana jako błąd (10). Zatem zgodnie z wyrażeniem (13), dla znanej funkcji gęstości prawdopodobieństwa błędu $g(e)$, dolną granicę przedziału niepewności określa zależność:

$$(14) \quad \int_{-\infty}^{\underline{u}} g(e) de = \frac{1-p}{2},$$

a górną:

$$(15) \quad \int_{\bar{u}}^{\infty} g(e) de = \frac{1-p}{2}.$$

Znając granice przedziału niepewności i jego środek w postaci wyniku pomiaru przedział mierzandru można zapisać jako [5]:

$$(16) \quad \bar{x} = \hat{x} + [\underline{u}; \bar{u}].$$

Dla symetrycznej funkcji gęstości prawdopodobieństwa zachodzi:

$$(17) \quad -\underline{u} = \bar{u} = U,$$

gdzie U jest niepewnością, której interpretacja jest zgodna z przewodnikiem [7]. W takim przypadku przedział niepewności jest symetryczny, a niepewność może być wyznaczona na podstawie funkcjonału:

$$(18) \quad \int_{-U}^U g(e) de = p.$$

Dla niesymetrycznego przedziału pojęcie niepewności nie ma sensu matematycznego, przy czym znaczenie przedziału niepewności nie zmienia się, gdyż zgodnie z zależnością (16) jest on składową przedziału mierzandru. Dla rozkładów "prawie" symetrycznych można określić niepewność jako średnią arytmetyczną granic wyznaczanych na podstawie zależności (14) i (15).

Przykład 1. Rzeczywista wartość napięcia mierzonego za pomocą 8-bitowego przetwornika A/C o z rysunku 1 wynosi $x = 1.728$ V, a kwant ma wartość $q = 0.01$ V. Uzyskano wynik pomiaru: $\hat{x} = 1,725$ V.

Zgodnie z funkcjonałem (18) niepewność spowodowana błędem kwantowania o rozkładzie symetrycznym jak na rysunku 4, obliczana jest jako:

$$(19) \quad \int_{-U}^U \frac{1}{q} de = p,$$

skąd otrzymuje się:

$$(20) \quad U = \frac{q}{2} p.$$

Dla poziomu ufności $p = 0.95$ niepewność przyjmuje wartość:

$$(21) \quad U = \frac{0,01}{2} 0,95 = 4,75 \cdot 10^{-3} \text{ V},$$

a zatem zgodnie z (16) wynik pomiaru mierzandru opisywany jest w tym przypadku przedziałem:

$$(22) \quad \bar{x} = 1,725 + [-4,7; 4,7] \cdot 10^{-3} = [1,7203; 1,7297] \text{ V}.$$

Wyznaczanie rozkładu błędu całkowitego

Błąd całkowity w modelu wyniku pomiaru (11) jest sumą (12) błędów cząstkowych. Oznacza to, że w przypadku, gdy błędy te nie są skorelowane, funkcja gęstości prawdopodobieństwa błędu całkowitego $g(e)$ może być wyznaczona na drodze splatania tego rodzaju funkcji $g_1(e_1) \dots g_l(e_l)$ ogólnie dla l błędów cząstkowych. Działanie to można ogólnie zapisać jako:

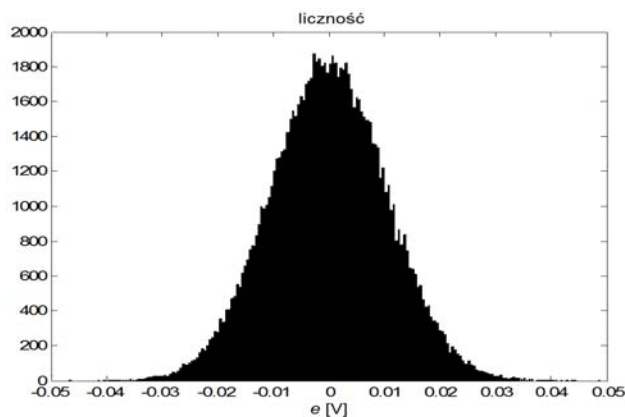
$$(23) \quad g(e) = g_1(e_1) \otimes g_2(e_2) \otimes \dots \otimes g_l(e_l),$$

gdzie \otimes jest symbolem splotu. Operacja splotu jest złożona matematycznie, a ponadto w praktyce rozkłady błędów są często wyznaczane eksperymentalnie i z reguły trudno jest je opisać analitycznie. Stąd najbardziej uniwersalnym, a zarazem efektywnym sposobem wyznaczania rozkładu błędu całkowitego jest zastosowanie metody Monte Carlo.

Eksperyment 1. Celem eksperymentu jest symulacyjne wyznaczenie rozkładu błędu całkowitego pomiarów realizowanych za pomocą przykładowego przetwornika A/C o parametrach podanych w Przykładzie 1. Wyniki pomiaru obarczone są błędem kwantowania o rozkładzie jak na rysunku 4 i błędem spowodowanym szumem v o rozkładzie normalnym $N(0; q)$. W takim przypadku wynik pomiaru zgodnie z równaniem (9) można opisać jako:

$$(24) \quad \hat{x} = q \left[\text{ent} \left(\frac{x}{q} + v \right) + 0,5 \right].$$

Eksperyment wykonano metodą Monte Carlo w 100 000 krokach. Na początku każdego kroku losowana jest wartość napięcia mierzonego x w zakresie pomiarowym przetwornika A/C wynoszącym od 0 do $2^8 \cdot 0,01 = 2,56$ V zgodnie z rozkładem jednostajnym oraz wartość szumu o rozkładzie normalnym $N(0; 0,01 \text{ V})$. Następnie oblicza się wynik pomiaru zgodnie z wyrażeniem (24), po czym wyznaczana jest wartość błędu na podstawie wzoru (10), która jest umieszczana w zbiorze wartości błędu. Po wykonaniu wszystkich kroków eksperymentu zbiór wartości błędu przedstawiany jest w postaci histogramu pokazanego na rysunku 5.



Rys. 5. Histogram błędu całkowitego pomiarów wykonywanych za pomocą przykładowego przetwornika A/C, gdy wyniki pomiaru opisywane są równaniem (24)

Znajomość rozkładu błędu całkowitego i rozkładów błędów cząstkowych pozwala m. in. na wyznaczenie współczynników korelacji między błędami cząstkowymi [7]. Gdy występują dwa błędy cząstkowe jak w Eksperymencie 1, współczynnik korelacji można wyznaczyć na podstawie wyrażenia:

$$(25) \quad c_{\text{kor}} = \frac{\sigma^2 - \sigma_q^2 - \sigma_{sz}^2}{2\sigma_q \sigma_{sz}},$$

gdzie σ_q i σ_{sz} są odchyleniami standardowymi odpowiednio błędu kwantowania i błędu powodowanego szumem, σ odchyleniem standardowym błędu całkowitego.

Przykład 2. Wariancja błędu całkowitego, wyznaczona dla zbioru wartości błędu uzyskanego w efekcie wykonania Eksperymentu 1 i przedstawionego w formie histogramu na rysunku 5, wynosi $\sigma^2 = 1,082 \cdot 10^{-4} \text{ V}^2$. Odchylenie standardowe błędu kwantowania o rozkładzie jak na rysunku 4 ma wartość:

$$(26) \quad \sigma_q = \frac{q}{\sqrt{12}} = \frac{1 \cdot 10^{-2}}{\sqrt{12}} = 0,289 \cdot 10^{-2} \text{ V},$$

a zatem jego wariancja: $\sigma_q^2 = (0,289 \cdot 10^{-2})^2 = 8,3 \cdot 10^{-6} \text{ V}^2$.
 Wariancja błędu szumu o odchyleniu standardowym
 równym wartości kwantu: $\sigma_{sz}^2 = (1 \cdot 10^{-2})^2 = 1 \cdot 10^{-4} \text{ V}^2$. Po
 wprowadzeniu tych wartości do wyrażenia (25) uzyskuje
 się:

$$(27) \quad c_{kor} = \frac{1,082 \cdot 10^{-4} - 8,3 \cdot 10^{-6} - 1 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 0,0104 \cdot 1 \cdot 10^{-2}} \cong 0,$$

co oznacza, że błędy cząstkowe nie są skorelowane.

Wykorzystanie modelu wyniku pomiaru do wyznaczenia niepewności wyniku przetwarzania algorytmicznego

Model w postaci wyrażenia (11) i (12) może być stosowany w przypadku, gdy wyniki pomiaru podawane są przetwarzaniu algorytmicznemu [1]. Oznaczając symbolem **Alg** operacje matematyczne realizowane w ramach algorytmu, ich wynik zgodnie z (11) można zapisać jako:

$$(28) \quad \text{Alg}\{x\} = \text{Alg}\{\hat{x}\} + \text{Alg}\{e\}.$$

Zgodnie z tym równaniem wartość mierzandru na wyjściu algorytmu uzyskuje się w efekcie wykonania działań algorytmu na wynikach pomiaru, a przedział niepewności po wykonaniu tych działań na błędach. Po złożeniu wyniku przetwarzania z przedziałem niepewności uzyskuje się opis mierzandru w postaci przedziałowej.

Przykład 3. Za pomocą przykładowego przetwornika A/C wykonano serię pomiarów napięcia o wartości $x = 1.728 \text{ V}$ w warunkach opisanych w Eksperymentie 1. Wyniki zawarto w Tabeli 1.

Tabela 1. Wyniki pomiarów napięcia zakłóconego szumem uzyskane za pomocą przetwornika A/C z rysunku 1

I	1	2	3	4	5	6
$\hat{x}(i)$	1,715	1,715	1,735	1,725	1,735	1,735

Przyjmijmy, że seria wyników z Tabeli 1 jest przetwarzana za pomocą algorytmu służącego do wyznaczenia wartości średniej z serii. Dla modelu (11) wielkość wyjściową algorytmem opisuje zależność:

$$(29) \quad x_A = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 x(i) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 \hat{x}(i) + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 e(i).$$

Średnia z serii wyników pomiaru uzyskuje wartość:

$$(30) \quad \bar{x} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 \hat{x}(i) = \frac{10,36}{6} = 1,727.$$

Błąd całkowity jest sumą błędu kwantowania e_q i błędu powodowanego szumem e_{sz} . Zatem zgodnie z wyrażeniem (29) błąd całkowity wyniku przetwarzania opisuje zależność:

$$(31) \quad e = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 e_q(i) + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 e_{sz}(i).$$

Biorąc pod uwagę, że błędy cząstkowe nie są skorelowane, jak pokazano to w Przykładzie 2, a realizacje tych błędów są pobierane odpowiednio z tych samych populacji, na podstawie równania (31) wariancja błędu całkowitego ma postać:

$$(32) \quad \sigma^2 = 6 \left(\frac{\sigma_q^2}{6^2} + \frac{\sigma_{sz}^2}{6^2} \right) = \frac{1}{6} (\sigma_q^2 + \sigma_{sz}^2).$$

Po wprowadzeniu do równania (32) wartości wariancji błędów cząstkowych obliczonych w Przykładzie 2,

otrzymuje się wartość odchylenia standardowego błędu całkowitego wynoszącą:

$$(33) \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{6} (\sigma_q^2 + \sigma_{sz}^2)} = 10^{-3} \sqrt{\frac{8,3 + 100}{6}} = 4,25 \cdot 10^{-3} \text{ V}.$$

Na podstawie centralnego twierdzenia granicznego można przyjąć, że błąd całkowity ma rozkład normalny, dla którego współczynnik rozszerzenia $k_r = 2$, przy poziomie ufności $p = 0,95$ [7]. W takim przypadku niepewność wynosi:

$$(34) \quad U = k_r \sigma = 2 \cdot 4,25 \cdot 10^{-3} = 8,5 \cdot 10^{-3} \text{ V}.$$

Zgodnie z obliczonymi wartościami (30) i (34), przedział mierzandru (8) ma w tym przypadku postać:

$$(35) \quad \bar{x} = 1,727 + [-8,5; 8,5] \cdot 10^{-3} = [1,7185; 1,7355] \text{ V}.$$

Podsumowanie

Opisana dedukcyjna definicja błędu tworzona jest na podstawie analizy procesu pomiaru realizowanego z wykorzystaniem wzorca o strukturze kwantowej, jednak odnosi się również do sytuacji, gdy zakłada się strukturę ziarnistą wzorca używając pojęcia rozdzielczości do opisu wyniku pomiaru. Można zatem powiedzieć, że tworzony na jej podstawie model pojedynczego wyniku pomiaru ma uniwersalny charakter. Model ten można wykorzystywać do uzyskiwania rozkładu błędu całkowitego wyniku przetwarzania algorytmicznego, dzięki czemu może być stosowany w systemach pomiarowych dla sygnałów zmiennych w czasie [1]. Na podstawie definicji błędu można zbudować formalne podstawy wyznaczania parametrów przedziału mierzandru tworzonych z wykorzystaniem wyniku pomiaru i przedziału niepewności określonego dla znanego rozkładu błędu całkowitego. Równanie błędu modelu wyniku pozwala na analizę udziału błędów cząstkowych w błędzie całkowitym, a także umożliwia analityczne obliczanie niepewności na podstawie odchyłek standardowych błędów cząstkowych, gdy spełnione są uwarunkowania centralnego twierdzenia granicznego.

Autorzy: prof. dr hab. inż. Jerzy Jakubiec, Politechnika Śląska, Katedra Metrologii Elektroniki i Automatyki, ul. Akademicka 10, 44-100 Gliwice, E-mail: jerzy.jakubiec@polsl.pl; dr hab. inż. Jerzy Roj, prof. PŚ, Politechnika Śląska, Katedra Metrologii Elektroniki i Automatyki, ul. Akademicka 10, 44-100 Gliwice, E-mail: jerzy.roj@polsl.pl.

LITERATURA

- [1] Jakubiec J.: *Błędy i niepewności danych w systemach pomiarowo-sterujących*. Podręcznik akademicki. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2010.
- [2] Jakubiec J.: *A New Conception of Measurement Uncertainty Calculation*. Acta Physica Polonica A. Vol. 124 (2013), No. 3, p. 436-444.
- [3] Jakubiec J. *Error based model of a single measurement result in uncertainty calculation*. Proc. of Metrology Commission of Katowice Branch of Polish Academy of Sciences, Conferences Nr 20. Problems and Progress in Metrology PPM'15, Kościelisko, 07-10 June 2015, p. 75-48.
- [4] Marcyniuk A. *Podstawy miernictwa elektrycznego dla kierunku elektronika*. Podręcznik akademicki. Gliwice 2002.
- [5] Neumaier A. *Interval Methods for System of Equation*. Cambridge University Press, 1990.
- [6] Skubis T. *Podstawy metrologicznej interpretacji wyników pomiaru*. Monografia. Gliwice 2004.
- [7] *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*. ISO 1992, 2008.
- [8] *Międzynarodowy słownik metrologii. Pojęcia podstawowe i ogólne oraz terminy z nimi związane*. Przewodnik. PKN, 2010.