

doi:10.15199/48.2023.04.09

# Adaptacyjne sterowanie położeniem ramienia w układzie napędu elektrycznego z nieliniowym połączeniem sprężystym

**Streszczenie.** W pracy przedstawiono algorytm adaptacyjnego sterowania położeniem ramienia w układzie napędowym z nieliniowym połączeniem sprężystym. Do zaprojektowania algorytmu sterowania użyto metody „całkowania wstecz”. Zaproponowane w algorytmie prawa adaptacji realizują funkcję samostrojzenia układu regulacji pozwalając projektantowi na nieznaną wartość parametrów układu napędowego. Działanie algorytmu zostało sprawdzone symulacyjnie oraz w układzie rzeczywistym.

**Abstract.** The paper presents an algorithm of adaptive control of the arm position in the drive with a non-linear elastic joint. The backstepping method was used to design the control algorithm. The laws of adaptation proposed in the algorithm implement the self-tuning function of the control system, and allow to avoid a process of identification parameters of the drive system. The operation of the algorithm has been verified in a simulation and in a real system. (**Adaptive control of the arm position in the electric drive with a non-linear elastic joint.**)

**Słowa kluczowe:** napęd z połączeniem sprężystym, metoda kroków wstecz, sterowanie nieliniowe, sterowanie adaptacyjne  
**Keywords:** elastic joint drive, backstepping, nonlinear control, adaptive control

## Wprowadzenie

Aktualnie w wielu procesach przemysłowych stosowane są różnego rodzaju układy napędowe, określane coraz częściej jako układy mechatroniczne. Zwiększanie niezawodności i dokładności procesów produkcyjnych, a co za tym idzie efektywności produkcji, stawia przed napędami coraz większe wymagania. Wysoka precyzja działania serwonapędu jest wymagana w robotyce, maszynach używanych w przemyśle tekstylnym i papierniczym, maszynach CNC i systemach mikroelektromechanicznych (MEMS) [1-3]. O właściwościach układu mechatronicznego decydują trzy główne elementy: rodzaj zastosowanego silnika napędowego, właściwości połączenia mechanicznego między silnikiem a częścią wykonawczą oraz zastosowany algorytm sterowania (regulator). W większości przypadków poprawne jest założenie o nieskończonej sztywności połączenia między silnikiem a obciążeniem. Istnieją jednak systemy, w których założenie o nieskończonej sztywności nie jest poprawne. Należą do nich: maszyny wiertnicze używane do poszukiwań ropy i gazu [4], turbiny wiatrowe [5], maszyny tekstylne i papiernicze. W takich układach może pojawić się rezonans mechaniczny [3, 6-7], który może powodować awarie i uszkodzenia. Pojawienie się drgań pogarsza także właściwości dynamiczne i statyczne systemu napędowego.

Układ napędowy z elastycznym wałem jest modelowany jako tzw. układ dwumasowy. Zadaniem algorytmu sterowania oprócz zapewnienia odpowiedniej szybkości i dokładności śledzenia jest także wytlumienie drgań skrętnych. Do zaprojektowania regulatora do sterowania takimi napędami stosuje się wiele różnych metod: zmodyfikowane regulatory liniowe (PI, LQ, itp. – [8]), sztuczne sieci neuronowe [9], sterowanie rozmyte [10] a także sterowanie adaptacyjne projektowane metodą „adaptive backstepping” (AB) [11].

Zaawansowane metody syntezy algorytmów sterowania wykorzystują modele matematyczne. Dokładność użytego modelu wpływa na właściwości projektowanego algorytmu sterowania. Wszystkie wymienione wyżej metody wykorzystują założenie, że zależność momentu skręcającego od kąta skręcenia, która ogólnie będzie nazywana krzywą sztywności, jest liniowa, oraz że parametry określające połączenie silnika z częścią roboczą są stałe.

W wielu napędach powyższe założenia nie są spełnione. Krzywa sztywności może być wypukła, ściśle rosnąca [12] w przypadku sprzęgieł pneumatycznych.

Mówimy wtedy o degresywnej charakterystyce sprężystości, lub wklęsła, ściśle rosnąca [13] dla sprzęgieł z elastyczną częścią polimerową (charakterystyka progresywna). Przykłady algorytmów sterowania uwzględniające „nieliniowość” momentu skręcającego zostały opisane w [14-16], gdzie zaproponowane algorytmy były wykorzystywane do regulacji prędkości.

W prezentowanym artykule zaproponowano algorytm sterowania pozycyjnego napędu z nieliniową sprężystością, zaprojektowany przy użyciu metody AB. Na etapie projektowania regulatora założono obecność nieliniowego, statycznego momentu tarcia, które występuje na obu końcach wału oraz występowanie grawitacyjnego momentu obciążenia. Zaprojektowany algorytm sterowania zapewnia eliminację drgań skrętnych oraz kompensację tarcia i momentu obciążenia, przy nieznanach parametrach napędu. Analiza teoretyczna została potwierdzona na drodze symulacji oraz badań eksperymentalnych.

## Obiekt i cel sterowania

Obiektem sterowania jest układ napędowy opisany równaniami

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{\varphi}_b &= \omega_b, \\ J_b \dot{\omega}_b &= S(\varphi) - T_b \tanh(K\omega_b) - c_b \omega_b - b \sin(\varphi_b), \\ \dot{\varphi}_r &= \omega_r, \\ J_r \dot{\omega}_r &= -S(\varphi) - c_r \omega_r - T_r \tanh(K\omega_r) + k_i i_r, \\ \varphi &= \varphi_r - \varphi_b \end{aligned}$$

gdzie  $J_r$  i  $J_b$  są momentami bezwładności, odpowiednio silnika i obciążenia;  $\varphi_r$  i  $\varphi_b$  oznaczają położenia kątowe silnika oraz obciążenia;  $b \sin(\varphi_b)$  odpowiada za obciążenie grawitacyjne od ramienia;  $i_r$  jest sygnałem sterującym (prąd silnika napędowego);  $k_i$  to stała momentu silnika;  $T_r$  i  $T_b$  są wartościami tarcia statycznego, modelowanego funkcją  $\tanh$  ze współczynnikiem  $K = 100$ , odpowiednio po stronie silnika i obciążenia;  $c_r$  i  $c_b$  są współczynnikami tarcia lepkiego silnika i obciążenia. Składnik  $S(\varphi)$  opisuje moment przenoszony przez wał napędowy:

$$(2) \quad S(\varphi) = p_1 \varphi + p_2 S_2(\varphi)$$

gdzie  $p_1 > 0$ , odpowiada za liniową część sprężystości połączenia,  $p_2$  za udział jej nieliniowej, nieparzystej, różniczkowalnej składowej, opisanej funkcją  $S_2(\varphi)$ .

Celem układu sterowania jest śledzenie zadanej, gładkiej trajektorii położenia obciążenia  $[\varphi_{bd}, \dot{\varphi}_{bd}, \ddot{\varphi}_{bd}]$ . Zakłada się możliwość całkowitej nieznanności

parametrów silnika, obciążenia i połączenia sprężystego, dla którego można oszacować tylko górne ograniczenie kąta skręcenia wału  $|\varphi| \leq \varphi_M$ .

### Algorytm sterowania

Do zaprojektowania algorytmu sterującego została wykorzystana adaptacyjna metoda „kroków wstecz” (adaptive backstepping) [17], w której pochodne wirtualnych sterowań są generowane przez liniowe filtry. Szczegółowe wyprowadzenie praw sterowania i adaptacji zostały zamieszczone w dodatku. Do zaimplementowania algorytmu sterowania niezbędne będzie wyznaczenie błędów (3)-(6)

$$(3) \quad e_1 = \varphi_{bd} - \varphi_b,$$

$$(4) \quad e_2 = \omega_{bd} - \omega_b,$$

$$(5) \quad e_{3f} = z_{13} - \alpha,$$

$$(6) \quad e_{4f} = z_{14} - \omega_r$$

realizacji zadanej trajektorii  $\varphi_{bd}$  i zadanego sterowania wirtualnego (7) oraz filtrowanych wartości zadanych sterowań wirtualnych (8),(9)

$$(7) \quad \omega_{bd} = \dot{\varphi}_{bd} + k_1 e_1,$$

$$(8) \quad \alpha_d = \hat{\theta}_b^T \xi_b + k_2 e_2 + e_1 + \frac{1}{2} e_2,$$

$$(9) \quad \omega_{rd} = \omega_b + \frac{z_{23} + k_3 e_{3f} - \hat{p}_{21} S_2(\varphi) + e_2}{1 + \hat{p}_{21} \frac{dS_2(\varphi)}{d\varphi}} + \frac{(1 + \hat{p}_{21} \frac{dS_2(\varphi)}{d\varphi})}{2} e_{3f},$$

których pochodne można wyznaczyć dokładnie (10), bądź w sposób przybliżony z wykorzystaniem filtrów (11),(12)

$$(10) \quad \dot{\omega}_{bd} = \ddot{\varphi}_{bd} + k_1 \dot{\varphi}_{bd} - k_1 \omega_b.$$

$$(11) \quad \dot{z}_{13} = z_{23}$$

$$\dot{z}_{23} = \frac{1}{a_{23}} (\alpha_d - z_{13} - a_{13} z_{23}).$$

$$(12) \quad \dot{z}_{14} = z_{24}$$

$$\dot{z}_{24} = \frac{1}{a_{24}} (\omega_{rd} - z_{14} - a_{14} z_{24}),$$

Sterowanie rzeczywiste napędem będzie wyrażone wzorem

$$(13) \quad i_r = \hat{\theta}_r^T \xi_r + k_4 e_{4f} + \left(1 + \hat{p}_{21} \frac{dS_2(\varphi)}{d\varphi}\right) e_{3f}.$$

Zakładając nieznaną wartość parametrów  $\theta_b^T = \begin{bmatrix} J_b & T_b & c_b & b \\ p_1 & p_1 & p_1 & p_1 \end{bmatrix}$ ,  $\theta_r^T = \begin{bmatrix} J_r & T_r & c_r & p_1 & p_2 \\ k_i & k_i & k_i & k_i & k_i \end{bmatrix}$ ,  $p_{21} = \frac{p_2}{p_1}$  układu, w powyższych równaniach wykorzystano ich estymaty, które podlegały następującym prawom adaptacji

$$(14) \quad \dot{\hat{\theta}}_r = \Gamma_r (\xi_r e_{4f} - \sigma_r \hat{\theta}_r),$$

$$(15) \quad \dot{\hat{\theta}}_b = \Gamma_b (\xi_b e_2 - \sigma_b \hat{\theta}_b),$$

$$(16) \quad \dot{\hat{p}}_{21} = \gamma_p \text{Proj}_{p^m, p^M} (-S_2(\varphi) e_2 - \sigma_p \hat{p}_{21}, \hat{p}_{21}),$$

gdzie

$$(17) \quad \xi_b^T = [\dot{\omega}_{bd} \quad \tanh(K\omega_b) \quad \omega_b \quad \sin(\varphi_b)],$$

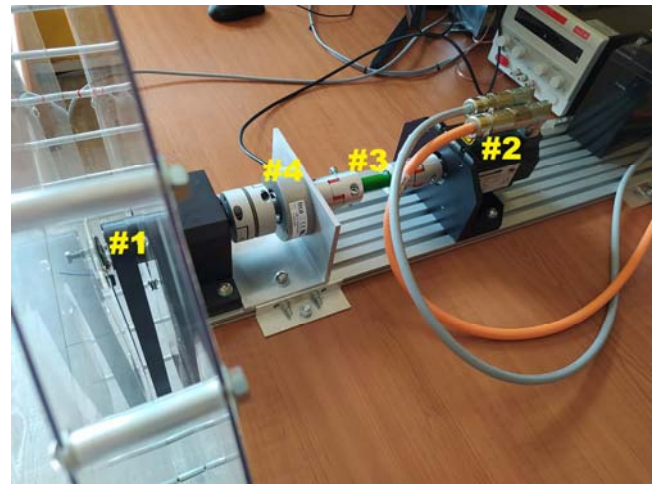
$$(18) \quad \xi_r^T = [z_{24} \quad \tanh(K\omega_r) \quad \omega_r \quad \varphi \quad S_2(\varphi)],$$

a operator  $\text{Proj}$  jest operatorem projekcji [17].

Parametrami projektowymi algorytmu są wzmocnienia  $k_1, k_2, k_3, k_4$ , parametry filtrów  $a_{13}, a_{23}, a_{41}, a_{42}$ , wzmocnienia  $\gamma_p, \Gamma_b = \text{diag}(\gamma_{b_{1..4}})$  i  $\Gamma_r = \text{diag}(\gamma_{r_{1..5}})$  w prawach adaptacji oraz ograniczenia dolne  $p_{21}^m$  i górne  $p_{21}^M$  estymaty  $\hat{p}_{21}$ . Sposób ich doboru i wpływ na pracę układu został omówiony w dalszej części tekstu.

### Stanowisko eksperymentalne i identyfikacja układu

Działanie algorytmu sterowania zostało przetestowane w układzie (rys. 1) z obciążeniem grawitacyjnym (#1), połączonym z silnikiem synchronicznym z magnesami trwałymi Kolmorgen AKM2G-41-P (#2) za pomocą elastycznego wałka (#3) o długości 45[mm] i średnicy 18[mm] wykonanego z poliuretanu. W prostym eksperymencie sprawdzono, że jest możliwe uzyskiwanie dla niego sprężystych skręceń większych niż  $\varphi_M = 3$  [rad], przy czym z uwagi na planowaną trajektorię, bezwładności i maksymalne momenty po obu stronach połączenia, wartość ta nie zostanie osiągnięta podczas pracy układu. Do pomiaru kąta obciążenia zastosowano enkoder LIKA C80 (#4). Pomiar kąta wału silnika mierzony był za pomocą enkodera wbudowanego w silnik. Obydwa enkodery cechowały się rozdzielczością pomiaru kąta równą  $2\pi/2^{13}$  rad. Silnik był zasilany przez falownik AKD-T02406, który pracował w trybie regulacji prądu. Algorytm sterowania został zrealizowany na platformie MicroLabBox DS1202. Sygnałami wejściowymi były zmierzone kąty  $\varphi_b$  oraz  $\varphi_r$ , a wyjściem był prąd zadany  $i_r$  dla falownika.



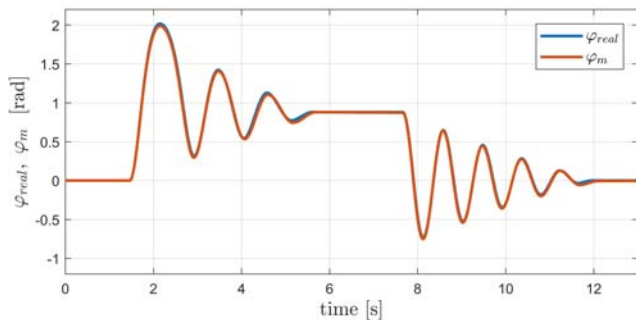
Rys.1. Zdjęcie stanowiska eksperymentalnego (opis w tekście)

Uruchomienie algorytmu sterowania w układzie rzeczywistym zostało poprzedzone badaniami symulacyjnymi, w których zastosowano model rzeczywistego układu. Parametry silnika zostały zaczerpnięte z dokumentacji i wynosiły  $J_r = 7.74 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2$ ,  $T_r = 0.023 \text{ Nm}$ ,  $c_r = 4.3 \cdot 10^{-5} \text{ Nms/rad}$ ,  $k_i = 0.147 \text{ Nm/A}$ , przy maksymalnym prądzie  $|i_r| \leq 19.9 \text{ A}$ . Po zdemontowaniu elastycznego wałka i bezpośrednim połączeniu silnika i obciążenia, zarejestrowano odpowiedź układu na skokowe zmiany prądu od zera do  $i_r = 7 \text{ A}$  i ponownie do zera. W tak otrzymany przebieg wpasowano przy pomocy algorytmu genetycznego odpowiedź (rys. 2) modelu obiektu zredukowanego, opisanego równaniem

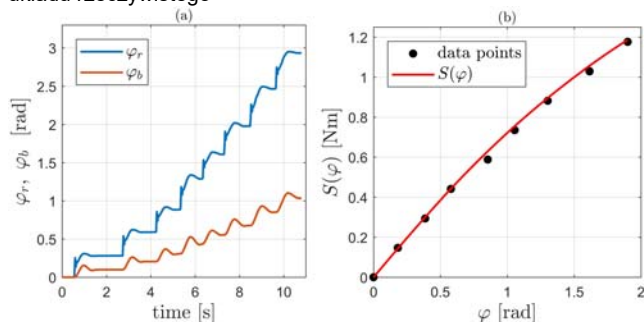
$$(19) \quad J\ddot{\varphi}_m = k_i i_m - T \tanh(100\dot{\varphi}_m) - c\dot{\varphi}_m - b \sin(\varphi_m),$$

w którym,  $b = 1.36 \text{ Nm}$ ,  $J = J_r + J_b = 0.0265 \text{ kgm}^2$ ,  $T = T_r + T_b = 0.042 \text{ Nm}$ ,  $c = c_r + c_b = 0.0071 \text{ Nms/rad}$ . Pozwoliło to na wyznaczenie parametrów obciążenia  $J_b = 0.0264 \text{ kgm}^2$ ,  $T_b = 0.019 \text{ Nm}$ ,  $c_b = 7.1 \cdot 10^{-5} \text{ Nms/rad}$ . Układ z powrotem doprowadzono do konfiguracji początkowej. Charakterystyka sztywności połączenia została wyznaczona w oparciu o zarejestrowane kąty silnika  $\varphi_r$ , obciążenia  $\varphi_b$  i ich analizy w stanie ustalonym dla różnej wartości generowanego momentu. Przebiegi zostały pokazane na rysunku 3a. Skokowe zmiany kątów były wynikiem skokowej zmiany prądu silnika od 0 do 8A, co 1A. Otrzymane dane pozwoliły na wyznaczenie charakterystyki

momentu  $S(\varphi)$ , co zostało pokazane na rysunku 3b. Jako funkcję aproksymującą nieliniową część sprężystości wybrano  $S_2(\varphi) = \tanh(\varphi)\varphi^2$ , a metodą najmniejszych kwadratów otrzymano wartości  $p_1 = 0.791$ ,  $p_2 = -0.092$  parametrów modelu (2). Ujemna wartość parametru  $p_2$  świadczy o degresywnym charakterze sprężystości.

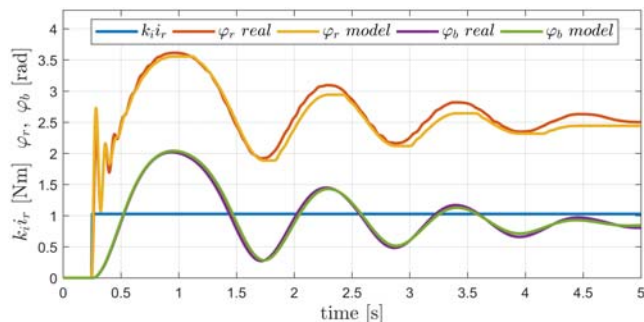


Rys.2. Odpowiedź modelu na tle zarejestrowanej odpowiedzi układu rzeczywistego



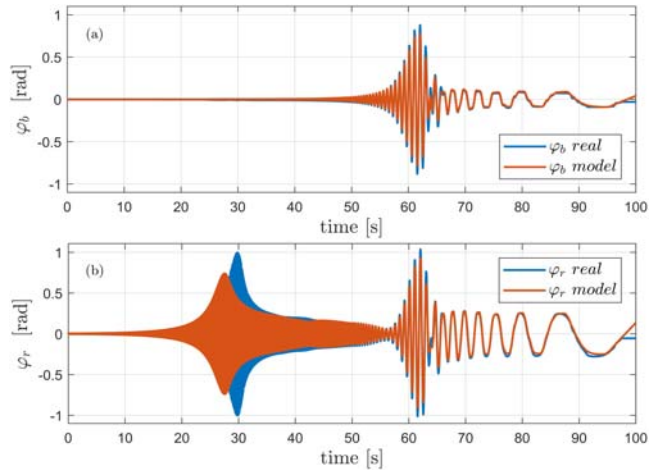
Rys.3. Zarejestrowane przebiegi położenia kąowego silnika i obciążenia (a) oraz degresywna charakterystyka sprężystości  $S(\varphi)$  (b)

W ramach sprawdzenia zgodności modelu z obiektem rzeczywistym zarejestrowano i porównano ich odpowiedzi skokowe dla  $i_r = 7A$  (rys.4). Tak dokładne wpasowanie było możliwe po wprowadzeniu do modelu nieuwzględnianego w równaniach i algorytmie sterowania momentu tłumienia  $b\dot{\varphi}$ , przy czym wartość  $b = 0.0016Nms/rad$  została dobrana eksperymentalnie, metodą prób i błędów.



Rys.4. Odpowiedzi skokowe rzeczywistego układu z połączeniem sprężystym i jego modelu

W ostatniej próbie układu otwartego zarejestrowano odpowiedzi przy wymuszeniu sinusoidalnym dla częstotliwości zmieniającej się od  $100Hz$  do  $0.1Hz$  (rys.5). Na rysunku 5a przedstawiającym kąt obciążenia widać szczyt rezonansu, który przypada w 62. sekundzie, czemu odpowiadała częstotliwość  $1Hz$ . Podobny wzrost amplitudy jest obserwowany po stronie silnika (rys.5b), gdzie w 30. sekundzie dodatkowo widać rezonans wywołany sprężystością połączenia. Dla układu rzeczywistego częstotliwość rezonansowa wynosiła  $12.5Hz$ , podczas gdy dla modelu była równa  $15Hz$ , co potwierdza dużą zgodność modelu z obiektem rzeczywistym.

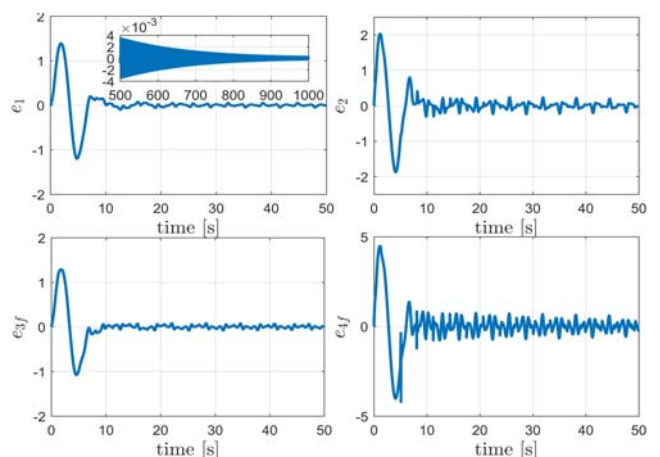


Rys.5. Położenie kątowe silnika (a) i obciążenia (b) dla różnej pulsacji sinusoidalnie zmiennego wymuszenia  $i_r$

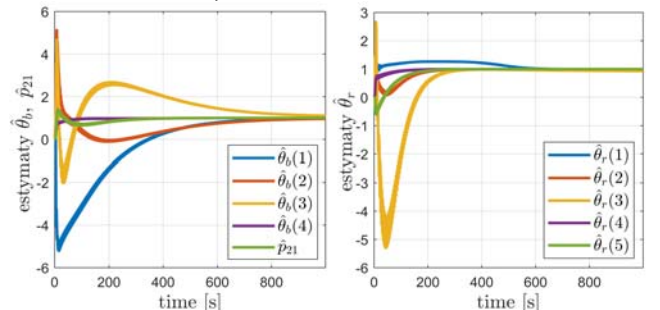
### Badania symulacyjne układu sterowania

W pierwszej fazie badań działanie algorytmu zostało sprawdzone podczas symulacji. Działania te miały na celu potwierdzenie poprawności wyprowadzonych praw sterowania i adaptacji, oraz pokazanie zasadności użycia nieliniowego modelu sprężystości w algorytmie sterowania.

Symulacja 1. Symulacje zostały przeprowadzone dla układu regulacji, w którym wyprowadzone prawo sterowania zastosowano do obiektu idealnego, nieuwzględniającego m.in. inercji regulatora prądu czy tłumienia w elastycznym wale.



Rys.6. Błędy  $e_1, e_2, e_{3f}, e_{4f}$  w symulowanym układzie regulacji



Rys.7. Przebiegi adaptowanych parametrów odniesione do dokładnych wartości parametrów układu (różnych od zera)

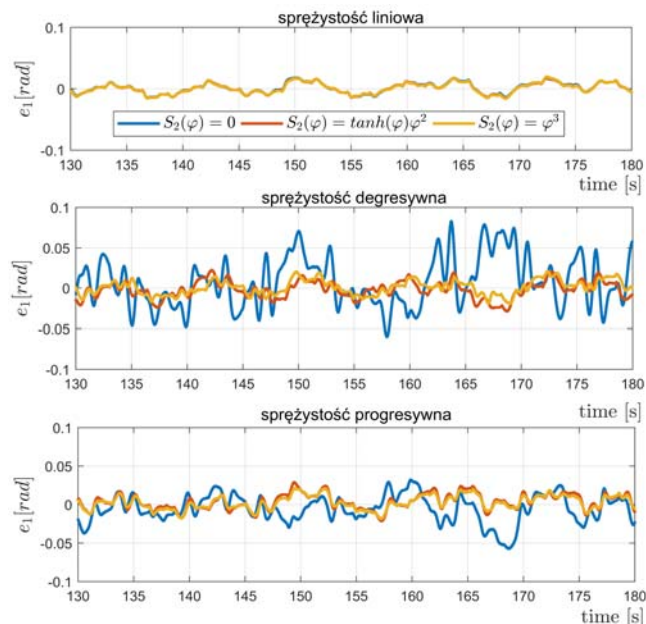
Trajektoria zadana położenia ramienia zmieniała się zgodnie z zależnością  $\varphi_{bd} = 2 \sin(t) [rad]$ . Na rysunku 6 pokazano przebiegi błędów  $e_1, e_2, e_{3f}, e_{4f}$ . Błąd śledzenia położenia  $e_1$  ustala się w okolicy  $10^{-4}rad$ . Jego niezerowa wartość wynika z zastosowania filtrów wartości zadanych.

W układzie założono nieznaną wszystkich estymowanych parametrów i przyjęto ich wartości początkowe równe zero. Znormalizowane (odniesione do wartości rzeczywistych), estymaty wszystkich parametrów zostały przedstawione na rysunku 7. Fakt, że dążą one do jedności, wraz z niewielkim błędem  $e_1$ , wskazuje na poprawną pracę układu, zgodną z przeprowadzonym dowodem stabilności, który został zamieszczony w dodatku.

**Symulacja 2.** Występowanie nieuwzględnianych w równaniach obiektu, a występujących w obiekcie rzeczywistym nielineowości np. kwantyzacji pomiaru położenia, oraz dodatkowej dynamiki wynikającej np. z inercji pętli regulacji prądu, filtrów prędkości czy tłumienia  $b$ , w oczywisty sposób pogarsza dokładność sterowania. W tej części przeprowadzono symulacje z „nieidealnym” obiektem, uwzględniającym powyższe niedoskonałości. Na tym tle sprawdzono jaki wpływ ma zastosowanie i wybór rodzaju nielineowego modelu sprężystości  $S_2(\varphi)$  w algorytmie sterowania. W trakcie symulacji przebadano sterowanie obiektami z połączeniem elastycznym o charakterystykach: liniowej ( $p_2 = 0$ ), nielineowej degresywnej ( $p_2 < 0$ ) i progresywnej ( $p_2 > 0$ ). Dla każdego z tych trzech przypadków w algorytmie sterowania wykorzystano kolejno modele

- $S_2(\varphi) = 0$ , co oznacza brak kompensacji nielineowości w algorytmie
- $S_2(\varphi) = \tanh(\varphi)\varphi^2$ , czyli wykorzystano w sterowaniu dokładnie taki sam model jaki został użyty w obiekcie, co jest możliwe po wcześniejszej identyfikacji charakterystyki sprężystości  $S(\varphi)$
- $S_2(\varphi) = \varphi^3$ , czyli odmienną od tej użytej w modelu obiektu, co wskazuje na wcześniejszą nieznaną zależność  $S(\varphi)$

Przebiegi uchybów regulacji  $e_1$  w stanie quasi ustalonym (po ustaleniu się estymat) pokazano na rysunku 8. W tabeli 1. zebrano wskaźniki RMSE jakości regulacji dla ostatnich 50 sekund.



Rys.8. Przebiegi uchybu położenia w stanie quasi-ustalonym dla różnego rodzaju charakteru sprężystości obiektu i użytego modelu w sterowaniu

Analizując otrzymane wyniki możemy stwierdzić, że

- najmniejsze błędy osiągnięto dla obiektu ze sprężystością liniową, gdy w algorytmie nie był potrzebny nielineowy składnik modelu sprężystości; z drugiej strony

fakt jego występowania nie wpłynął w żaden sposób na dokładność regulacji, bowiem układ adaptacji dopasował odpowiednio parametry;

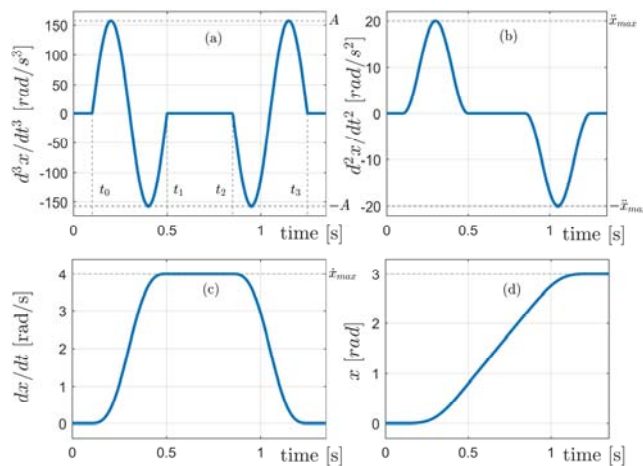
- pominięcie w sterowaniu nielineowości sprężystości w przypadku, gdy taka w obiekcie występuje, daje widocznie gorsze wyniki, niż w przypadku gdy się ją modeluje, i tak dla sprężystości degresywnej jej uwzględnienie dało trzykrotną poprawę jakości regulacji i dwukrotną dla przypadku z charakterystyką progresywną;
- wybór funkcji opisującej nielineowość nie miał większego znaczenia, co sugeruje, że dokładna znajomość kształtu nielineowego składnika sprężystości, a więc jej wcześniejsza identyfikacja nie jest konieczna, gdyż układ adaptacyjny kompensuje tę niewiedzę przez odpowiednią adaptację parametrów.

Tabela 1. Pierwiastek błędów średniokwadratowych (RMSE) regulacji położenia policzony dla 50 sekund w stanie quasi-ustalonym

Model nielineowości $S_2(\varphi)$ w algorytmie sterującym	Nielineowość w połączeniu elastycznym		
	brak $p_2 = 0$	degresywna $p_2 = -0.092$	progresywna $p_2 = 0.092$
$S_2(\varphi) = 0$	0.0087	0.0313	0.185
$S_2(\varphi) = \tanh(\varphi)\varphi^2$	0.0086	0.0108	0.107
$S_2(\varphi) = \varphi^3$	0.0086	0.0107	0.093

### Uruchomienie układu rzeczywistego

Podczas pracy układu rzeczywistego ramię miało osiągać losowo wybrane położenia z zakresu  $\pm 1,5\pi$  [rad]. Pojedyncze segmenty tak wybranej trajektorii dla jednej docelowej wartości zadanej  $\varphi_{bd}$  były generowane za pomocą całkowania zrywu, który wraz z jego kolejnymi całkami został przedstawiony na rysunku 9. Odpowiedni dobór parametrów amplitudy zrywu (rys.9a), okresu sinusoidy i czasu przejazdu  $t_{12}$  ze stałą prędkością, pozwala wygenerować trajektorię zadaną dla docelowego położenia (rys.9d), z nałożonym ograniczeniem maksymalnego przyspieszenia (rys.9b), prędkości (rys.9c).

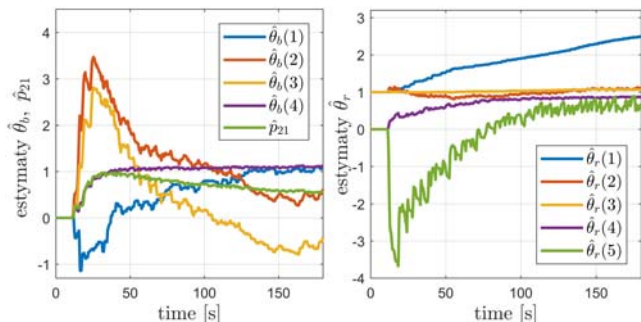


Rys.9. Sposób generowania wartości zadanej. Przykład dla maksymalnych wartości  $|\dot{\varphi}_{bd}| = 20 \text{ rad/s}^2$ ,  $\dot{\varphi}_{bd} = 4 \text{ rad/s}$  i zadanego  $\varphi_{bd} = 3 \text{ rad}$

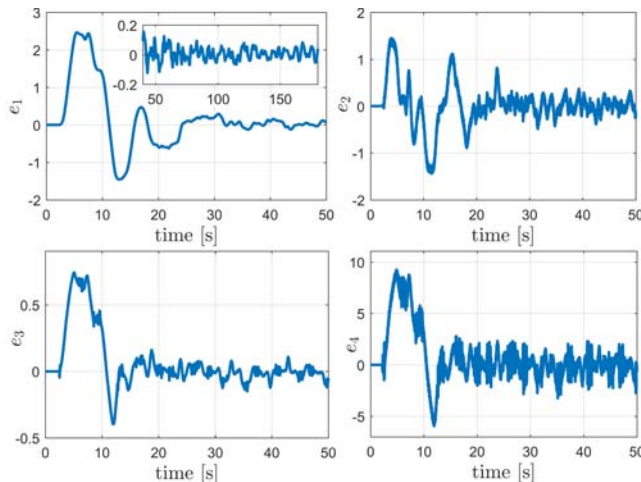
Założono całkowitą nieznaną parametrów obciążenia  $\theta_b$  i połączenia sprężystego  $p_{12}$ . Osiągnięto to przyjmując zerowe wartości początkowe estymat  $\hat{p}_{21}$  i  $\hat{\theta}_b$ . Trzy wartości początkowe wektora  $\hat{\theta}_r(0)$ , czyli estymat parametrów, związanych z silnikiem zostały zaczerpnięte z dokumentacji. Przebiegi czasowe estymowanych parametrów zostały pokazane na rysunku 10.

Oprócz wspomnianych wcześniej, modelowanych nielineowości i inercji, w układzie rzeczywistym występują także inne nielineowości np. efekt Stribecka w tarcu czy

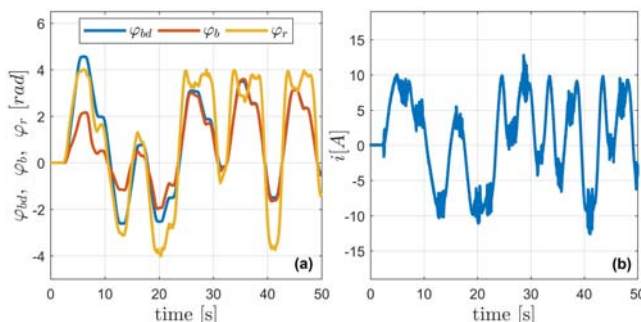
nieliniowość w charakterystyce prądowo-momentowej silnika, które pogorszą jakość rzeczywistego układu regulacji w porównaniu z wynikami symulacji. Błąd śledzenia położenia  $e_1$  został ograniczony do poziomu  $0.1rad$  po upływie 100 sekund (rys. 11), a po odczekaniu kolejnych 200 sekund nie przekraczał  $0.05rad$ . Podczas dalszej pracy układu nie nastąpiła już dalsza poprawa dokładności regulacji. Przebiegi wartości zadanej i aktualnej kąta położenia ramienia oraz pozycja wirnika zostały pokazane na rysunku 12a. Porównanie kątów  $\varphi_b$  i  $\varphi_r$  wskazuje na skręcenie wału dochodzące nawet do  $2rad$ . Rysunek 12b przedstawia zmierzony prąd silnika.



Rys.10. Znormalizowane przebiegi adaptowanych parametrów podczas pracy układu rzeczywistego



Rys.11. Błędy  $e_1, e_2, e_{3f}, e_{4f}$  w rzeczywistym układzie regulacji



Rys.12. Położenie zadane  $\varphi_{bd}$  i aktualne  $\varphi_b$  ramienia, silnika  $\varphi_r$  (a) oraz zmierzony prąd silnika (b)

Rzeczywisty układ był uruchamiany kilkakrotnie z różnymi parametrami sterowania. Dobór wzmacnień  $k_{1..4}$  wpływał nie tylko na wielkość błędu regulacji ale i na jakość sygnału sterującego. Zbyt duże wartości tych wzmacnień powodowały duże szybkie zmiany prądu silnika, co pociągało za sobą m.in. głośną pracę układu. Wybór mniejszych wzmacnień pociągał za sobą duże błędy  $e_2$  i  $e_{4f}$ , które z kolei będąc obecne w prawach adaptacji

zapewniały większą szybkość zmian estymat, szczególnie na początku procesu strojenia. Bezpośrednio odpowiedzialnymi za prędkość adaptacji były jednak wzmacnienia  $\gamma_p, \Gamma_b = \text{diag}(\gamma_{b_{1..4}})$  i  $\Gamma_r = \text{diag}(\gamma_{r_{1..5}})$ . Mniejsze wartości tych parametrów powodowały wydłużenie procesu strojenia, co przekładało się na wolne zanikanie błędu regulacji, z kolei zbyt duże wartości powodowały szybkie narastanie estymowanych parametrów i osiągnięcie przez nie dużych wartości. Możliwe jest ograniczenie wartości estymowanych parametrów poprzez zwiększenie parametrów  $\sigma$  w prawach adaptacji, lub poprzez zastosowanie projekcji. Projekcja jednak została zastosowana tylko dla estymaty  $\hat{p}_{21}$ , aby uniknąć dzielenia przez zero w zależności (24), co zostanie zapewnione gdy

$$(20) \quad \hat{p}_{21} > - \left( \frac{dS_2(\varphi)}{d\varphi} \right)^{-1},$$

z czego wynika ograniczenie górne estymaty  $p^m > -\frac{1}{3\varphi_M^2}$ , gdy zdecydujemy się na wybór w sterowaniu  $S_2(\varphi) = \varphi^3$ , przy oszacowaniu maksymalnego skręcenia wału  $|\varphi| \leq \varphi_M$  w zakresie odkształceń sprężystych.

### Podsumowanie

W niniejszym artykule zaproponowano nieliniowy, adaptacyjny algorytm sterowania położeniem dla elektrycznego układu napędowego z połączeniem sprężystym. Poprawność działania algorytmu sprawdzono podczas badań symulacyjnych. Najpierw pokazano jego zdolność do samostrojenia się w przypadku, gdy nie były znane wartości parametrów silnika i obciążenia. W kolejnych symulacjach pokazano korzyść z uwzględnienia nieliniowego charakteru sprężystości połączenia w algorytmie regulacji. Badania dla różnie zdefiniowanych funkcji  $S_2(\varphi)$  opisujących nieliniowość sprężystości pokazały, że nie jest także konieczne wcześniejsze identyfikowanie charakterystyki sprężystości, a jedyną potrzebną informacją jest znajomość maksymalnego skręcenia wału. Prawidłowe działanie algorytmu zostało potwierdzone w układzie rzeczywistym z obciążeniem w postaci ciężkiego ramienia połączonego elastycznym wałem degresywnym z silnikiem synchronicznym z magnesami trwałymi.

### Dodatek: Algorytm sterujący i dowód stabilności

#### Krok 1

Definiujemy błąd śledzenia

$$(21) \quad e_1 = \varphi_{bd} - \varphi_b$$

i określamy jego dynamikę

$$(22) \quad \dot{e}_1 = \dot{\varphi}_{bd} - \omega_b.$$

“Wirtualne sterowanie”  $\omega_b$  zostanie użyte do stabilizacji układu opisanego równaniem (22). Zadana wartość wirtualnego sterowania oznaczmy przez  $\omega_{bd}$  i definiujemy błąd śledzenia

$$(23) \quad e_2 = \omega_{bd} - \omega_b.$$

Pozwala to zapisać (21) jako

$$(24) \quad \dot{e}_1 = \dot{\varphi}_{bd} - \omega_{bd} + e_2.$$

Jeżeli wybierzemy wartość zadaną

$$(25) \quad \omega_{bd} = \dot{\varphi}_{bd} + k_1 e_1,$$

gdzie  $k_1 > 0$  jest parametrem projektowym, sprowadzimy równanie (24) do postaci:

$$(26) \quad \dot{e}_1 = -k_1 e_1 + e_2.$$

Pozwala to pokazać, że pochodna sterowania wirtualnego jest dostępna do realizacji serowania

$$(27) \quad \dot{\omega}_{bd} = \dot{\varphi}_{bd} + k_1 \dot{\varphi}_{bd} - k_1 \omega_b.$$

### Krok 2

Dynamika błędu  $e_2$  jest określona równaniem

$$(28) \quad \begin{aligned} \frac{J_b}{p_1} \dot{e}_2 &= \frac{J_b}{p_1} \dot{\omega}_{bd} - \varphi - \frac{p_2}{p_1} S_2(\varphi) + \\ &+ \frac{T_b}{p_1} \tanh(K\omega_b) + \frac{c_b}{p_1} \omega_b + \frac{b}{p_1} \sin(\varphi_b) = \\ &= \theta_b^T \xi_b - \varphi - \hat{p}_{21} S_2(\varphi) - \tilde{p}_{21} S_2(\varphi), \end{aligned}$$

gdzie:

$$(29) \quad \begin{aligned} \theta_b^T &= \left[ \frac{J_b}{p_1} \quad \frac{T_b}{p_1} \quad \frac{c_b}{p_1} \quad \frac{b}{p_1} \right], \\ \xi_b^T &= [\dot{\omega}_{bd} \quad \tanh(K\omega_b) \quad \omega_b \quad \sin(\varphi_b)], \\ \tilde{p}_{21} &= p_{21} - \hat{p}_{21}, \end{aligned}$$

a parametr  $p_{21} = p_2/p_1$ , będzie przybliżany z błędem  $\tilde{p}_{21}$  estymatą  $\hat{p}_{21}$  generowaną przez odpowiednie prawo adaptacji.

Wyrażenie  $\alpha = \varphi + \hat{p}_{21} S_2(\varphi)$  będzie kolejnym wirtualnym sterowaniem, dla którego wprowadzamy wartość zadaną  $\alpha_d$ . Definiujemy błąd śledzenia:

$$(30) \quad e_3 = \alpha_d - \alpha$$

i przepisujemy (27) jako

$$(31) \quad \frac{J_b}{p_1} \dot{e}_2 = \theta_b^T \xi_b - \alpha_d + e_3 - \tilde{p}_{21} S_2(\varphi).$$

Wektor nieznanych parametrów  $\theta_b$  zostanie zastąpiony estymatą  $\hat{\theta}_b$ , a błąd estymacji oznaczymy przez

$$(32) \quad \tilde{\theta}_b = \theta_b - \hat{\theta}_b.$$

Wybór wartości zadanej

$$(33) \quad \alpha_d = \hat{\theta}_b^T \xi_b + k_2 e_2 + e_1 + \frac{1}{2} e_2,$$

gdzie  $k_2 > 0$  jest parametrem projektowym, sprowadza równanie (31) do postaci

$$(34) \quad J_b \dot{e}_2 = -e_1 - k_2 e_2 + e_3 + \tilde{\theta}_b^T \xi_b - \tilde{p}_{21} S_2(\varphi) - \frac{1}{2} e_2.$$

### Krok 3

Pochodna wartości zadanej  $\alpha_d$  jest potrzebna do kreślenia dynamiki błędu  $e_3$ . Analityczna postać tej pochodnej będzie skomplikowanym wyrażeniem matematycznym, dlatego pochodna  $\alpha_d$  zostanie wyznaczona poprzez filtr drugiego rzędu:

$$(35) \quad \begin{aligned} \dot{z}_{13} &= z_{23} \\ \dot{z}_{23} &= \frac{1}{a_{23}} (\alpha_d - z_{13} - a_{13} z_{23}). \end{aligned}$$

Ten sposób wyznaczania pochodnej jest w literaturze określany jako „virtual control command filtering” [18] lub „dynamic surface method” [19]. Parametry projektowe filtra  $a_{13}$  i  $a_{23}$  są wybrane tak, aby pierwiastki wielomianu charakterystycznego  $a_{23}s^2 + a_{13}s + 1$  były rzeczywiste ujemne. Odpowiedni wybór warunków początkowych filtra zapewnia, że błąd filtra  $\rho_3 = \alpha_d - z_{13}$  jest ograniczony:

$$(36) \quad |\rho_3| = |\alpha_d - z_{13}| \leq \rho_{3m} < \infty.$$

Definiujemy filtrowany błąd śledzenia

$$(37) \quad e_{3f} = z_{13} - \alpha = z_{13} + e_3 - \alpha_d = e_3 - \rho_3$$

i przepisujemy wyrażenie (33) jako

$$(38) \quad \begin{aligned} J_b \dot{e}_2 &= -e_1 - k_2 e_2 + e_{3f} + \rho_3 + \\ &+ \tilde{\theta}_b^T \xi_b - \tilde{p}_{21} S_2(\varphi) - \frac{1}{2} e_2. \end{aligned}$$

Dynamika błędu  $e_{3f}$  ma postać

$$(39) \quad \begin{aligned} \dot{e}_{3f} &= z_{23} - \omega_r + \omega_b - \hat{p}_{21} S_2(\varphi) + \\ &- \hat{p}_{21} \frac{dS_2(\varphi)}{d\varphi} (\omega_r - \omega_b). \end{aligned}$$

Prędkość  $\omega_r$  będzie kolejnym „wirtualnym sterowaniem”, a  $\omega_{rd}$  oznacza wartość zadaną dla  $\omega_r$ . Błąd śledzenia będzie określony przez

$$(40) \quad e_4 = \omega_{rd} - \omega_r,$$

co pozwoli zapisać równanie (39) w postaci:

$$(41) \quad \begin{aligned} \dot{e}_{3f} &= z_{23} - \omega_{rd} + e_4 + \omega_b - \hat{p}_{21} S_2(\varphi) + \\ &- \hat{p}_{21} \frac{dS_2(\varphi)}{d\varphi} (\omega_{rd} - e_4 - \omega_b). \end{aligned}$$

Jeżeli wybierzemy

$$(42) \quad \omega_{rd} = \omega_b + \frac{z_{23} + k_3 e_{3f} - \hat{p}_{21} S_2(\varphi) + e_2}{1 + \hat{p}_{21} \frac{dS_2(\varphi)}{d\varphi}} + \frac{(1 + \hat{p}_{21} \frac{dS_2(\varphi)}{d\varphi})}{2} e_{3f},$$

gdzie  $k_3 > 0$  jest parametrem projektowym równanie (41) możemy zapisać jako

$$(43) \quad \begin{aligned} \dot{e}_{3f} &= -e_2 - k_3 e_{3f} + \left(1 + \hat{p}_{21} \frac{dS_2(\varphi)}{d\varphi}\right) e_4 + \\ &- \frac{1}{2} \left[1 + \hat{p}_{21} \frac{dS_2(\varphi)}{d\varphi}\right]^2 e_{3f}. \end{aligned}$$

### Krok 4

Podobnie jako poprzednio do wyznaczenia pochodnej wartości zadanej  $\omega_{rd}$  zostanie użyty filtr liniowy drugiego rzędu

$$(44) \quad \begin{aligned} \dot{z}_{14} &= z_{24} \\ \dot{z}_{24} &= \frac{1}{a_{24}} (\omega_{rd} - z_{14} - a_{14} z_{24}), \end{aligned}$$

i podobnie jak poprzednio, po odpowiednim dobraniu parametrów  $a_{14}$  i  $a_{24}$  błąd filtra  $\rho_4 = \omega_{rd} - z_{14}$  będzie ograniczony

$$(45) \quad |\rho_4| = |\omega_{rd} - z_{14}| \leq \rho_{4m} < \infty.$$

Po zdefiniowaniu filtrowanego błędu śledzenia

$$(46) \quad e_{4f} = z_{14} - \omega_r = z_{14} + e_4 - \omega_{rd} = e_4 - \rho_4,$$

stosując wyrażenia

$$(47) \quad \begin{aligned} e_4 &= \omega_{rd} - \omega_r = e_{4f} + \rho_4, \\ |\rho_4| &= |\omega_{rd} - z_{14}| \leq \rho_{4m} < \infty, \end{aligned}$$

możemy przepisać równanie (43) jako

$$(48) \quad \begin{aligned} \dot{e}_{3f} &= -e_2 - k_3 e_{3f} + \left(1 + \hat{p}_{21} \frac{dS_2(\varphi)}{d\varphi}\right) e_{4f} + \\ &+ \left(1 + \hat{p}_{21} \frac{dS_2(\varphi)}{d\varphi}\right) \rho_4 - \frac{1}{2} \left[1 + \hat{p}_{21} \frac{dS_2(\varphi)}{d\varphi}\right]^2 e_{3f}. \end{aligned}$$

Określamy dynamikę błędu  $e_{4f}$

$$(49) \quad \begin{aligned} \frac{J_r}{k_i} \dot{e}_{4f} &= \frac{J_r}{k_i} z_{24} + \frac{p_1}{k_i} \varphi + \frac{p_2}{k_i} S_2(\varphi) + \frac{c_r}{k_i} \omega_r \\ &+ \frac{T_r}{k_i} \tanh(K\omega_r) - i_r = \theta_r^T \xi_r - i_r, \end{aligned}$$

gdzie

$$(50) \quad \begin{aligned} \theta_r^T &= \left[ \frac{J_r}{k_i} \quad \frac{T_r}{k_i} \quad \frac{c_r}{k_i} \quad \frac{p_1}{k_i} \quad \frac{p_2}{k_i} \right], \\ \xi_r^T &= [z_{24} \quad \tanh(K\omega_r) \quad \omega_r \quad \varphi \quad S_2(\varphi)]. \end{aligned}$$

Wektor nieznanych parametrów  $\theta_r$  zostanie zastąpiony estymatą  $\hat{\theta}_r$ , a błąd estymacji oznaczymy przez

$$(51) \quad \tilde{\theta}_r = \theta_r - \hat{\theta}_r.$$

Wybór prawa sterowania

$$(52) \quad i_r = \tilde{\theta}_r^T \xi_r + k_4 e_{4f} + \left(1 + \hat{p}_{21} \frac{dS_2(\varphi)}{d\varphi}\right) e_{3f},$$

gdzie  $k_4 > 0$  jest parametrem projektowym, sprowadza równanie (31) do postaci:

$$(53) \quad \frac{J_r}{k_i} \dot{e}_{4f} = -k_4 e_{4f} - \left(1 + \hat{p}_{21} \frac{dS_2(\varphi)}{d\varphi}\right) e_{3f} + \tilde{\theta}_r^T \xi_r.$$

Dynamika zamkniętego układu regulacji jest więc określona przez równania (26), (38), (48) i (53) oraz przez dynamikę pętli adaptacyjnej, która musi zostać zaprojektowana tak, aby cały układ pozostał stabilny. Prawa adaptacji zostaną określone na podstawie analizy funkcji Lapunowa

$$(54) \quad V = \frac{1}{2} \left( e_1^2 + \frac{J_b}{p_1} e_2^2 + e_{3f}^2 + \frac{J_r}{k_i} e_{4f}^2 \right) + \frac{1}{2} \left( \tilde{\theta}_r^T \Gamma_r^{-1} \tilde{\theta}_r + \frac{1}{\gamma_p} \tilde{p}_{21}^2 + \tilde{\theta}_b^T \Gamma_b^{-1} \tilde{\theta}_b \right).$$

Pochodna funkcji Lapunowa jest określona przez następujący ciąg przekształceń (55-57):

$$(55) \quad \begin{aligned} \dot{V} = & e_1(-k_1 e_1 + e_2) + e_2(-e_1 - k_2 e_2 + e_{3f} + \rho_3) + \\ & + e_2 \left( \tilde{\theta}_b^T \xi_b - \tilde{p}_{21} S_2(\varphi) - \frac{1}{2} e_2 \right) + e_{3f}(-e_2 - k_3 e_3) + \\ & + e_{3f} \left( \left(1 + \hat{p}_{21} \frac{dS_2(\varphi)}{d\varphi}\right) e_{4f} + \left(1 + \hat{p}_{21} \frac{dS_2(\varphi)}{d\varphi}\right) \rho_4 \right) + \\ & + e_{3f} \left( -\frac{1}{2} \left[1 + \hat{p}_{21} \frac{dS_2(\varphi)}{d\varphi}\right]^2 e_{3f} \right) + e_{4f}(-k_4 e_{4f} + \tilde{\theta}_r^T \xi_r) + \\ & + e_{4f} \left( -\left(1 + \hat{p}_{21} \frac{dS_2(\varphi)}{d\varphi}\right) e_{3f} \right) + \tilde{\theta}_r^T \Gamma_r^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_r + \\ & + \frac{1}{\gamma_p} \tilde{p}_{21} \dot{\tilde{p}}_{21} + \tilde{\theta}_b^T \Gamma_b^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_b \end{aligned}$$

$$(56) \quad \begin{aligned} \dot{V} = & -k_1 e_1^2 - k_2 e_2^2 - k_3 e_{3f}^2 - k_4 e_{4f}^2 - \frac{1}{2} e_2^2 + e_2 \rho_3 + \\ & - \frac{1}{2} \rho_3^2 + \frac{1}{2} \rho_3^2 + \frac{1}{2} \rho_4^2 - \frac{1}{2} \rho_4^2 + \left(1 + \hat{p}_{21} \frac{dS_2(\varphi)}{d\varphi}\right) \rho_4 e_{3f} + \\ & - \frac{1}{2} \left[1 + \hat{p}_{21} \frac{dS_2(\varphi)}{d\varphi}\right]^2 e_{3f}^2 + \tilde{\theta}_r^T \left( \Gamma_r^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_r + \xi_r e_{4f} \right) + \\ & + \tilde{p}_{21} \left( \frac{1}{\gamma_p} \dot{\tilde{p}}_{21} - S_2(\varphi) e_2 \right) + \tilde{\theta}_b^T \left( \Gamma_b^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_b + \xi_b e_2 \right) \end{aligned}$$

$$(57) \quad \begin{aligned} \dot{V} = & -k_1 e_1^2 - k_2 e_2^2 - k_3 e_{3f}^2 - k_4 e_{4f}^2 - \frac{1}{2} (e_2 - \rho_3)^2 + \\ & + \frac{1}{2} \rho_3^2 + \frac{1}{2} \rho_4^2 - \frac{1}{2} \left( \left(1 + \hat{p}_{21} \frac{dS_2(\varphi)}{d\varphi}\right) e_{3f} - \rho_4 \right)^2 + \\ & + \tilde{\theta}_r^T \left( \Gamma_r^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_r + \xi_r e_{4f} \right) + \tilde{p}_{21} \left( \frac{1}{\gamma_p} \dot{\tilde{p}}_{21} - S_2(\varphi) e_2 \right) + \\ & + \tilde{\theta}_b^T \left( \Gamma_b^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_b + \xi_b e_2 \right) \end{aligned}$$

Wybór praw adaptacji

$$(58) \quad \dot{\tilde{\theta}}_r = \Gamma_r (-\xi_r e_{4f} + \sigma_r \tilde{\theta}_r) \Rightarrow \dot{\tilde{\theta}}_r = \Gamma_r (\xi_r e_{4f} - \sigma_r \tilde{\theta}_r),$$

$$(59) \quad \dot{\tilde{\theta}}_b = \Gamma_b (-\xi_b e_2 + \sigma_b \tilde{\theta}_b) \Rightarrow \dot{\tilde{\theta}}_b = \Gamma_b (\xi_b e_2 - \sigma_b \tilde{\theta}_b),$$

$$(60) \quad \begin{aligned} \dot{\tilde{p}}_{21} = & -\gamma_p Proj_{p^m, p^M} (-S_2(\varphi) e_2 - \sigma_p \tilde{p}_{21}, \tilde{p}_{21}) \\ \dot{\hat{p}}_{21} = & \gamma_p Proj_{p^m, p^M} (-S_2(\varphi) e_2 - \sigma_p \tilde{p}_{21}, \tilde{p}_{21}), \end{aligned}$$

gdzie  $p^m$  jest dolnym ograniczeniem parametru  $\hat{p}_{21}$ ,  $p^M$  jest górnym ograniczeniem parametru  $\hat{p}_{21}$ , a operator *Proj* jest operatorem projekcji [17], pozwala zapisać pochodną (57) w postaci:

$$(61) \quad \begin{aligned} \dot{V} = & -k_1 e_1^2 - k_2 e_2^2 - k_3 e_{3f}^2 - k_4 e_{4f}^2 - \frac{1}{2} (e_2 - \rho_3)^2 + \\ & + \frac{1}{2} \rho_3^2 + \frac{1}{2} \rho_4^2 - \frac{1}{2} \left( \left(1 + \hat{p}_{21} \frac{dS_2(\varphi)}{d\varphi}\right) e_{3f} - \rho_4 \right)^2 + \\ & + \sigma_r \tilde{\theta}_r^T \dot{\tilde{\theta}}_r + \sigma_b \tilde{\theta}_b^T \dot{\tilde{\theta}}_b + \sigma_p \tilde{p}_{21} \dot{\tilde{p}}_{21}. \end{aligned}$$

Wykorzystując nierówności

$$(62) \quad \tilde{\theta}_i^T \dot{\tilde{\theta}}_i \leq -\frac{1}{2} \tilde{\theta}_i^T \dot{\tilde{\theta}}_i + \frac{1}{2} \theta_i^T \dot{\theta}_i \quad \text{dla } i = b, r,$$

$$(63) \quad \tilde{p}_{21} \dot{\tilde{p}}_{21} \leq -\frac{1}{2} \tilde{p}_{21}^2 + \frac{1}{2} p_{21}^2,$$

można sprowadzić zależność (61) do

$$(64) \quad \begin{aligned} \dot{V} \leq & -k_1 e_1^2 - k_2 e_2^2 - k_3 e_{3f}^2 - k_4 e_{4f}^2 + \frac{1}{2} \rho_3^2 + \frac{1}{2} \rho_4^2 + \\ & - \frac{\sigma_r}{2} \tilde{\theta}_r^T \dot{\tilde{\theta}}_r + \frac{\sigma_r}{2} \theta_r^T \dot{\theta}_r - \frac{\sigma_b}{2} \tilde{\theta}_b^T \dot{\tilde{\theta}}_b + \frac{\sigma_b}{2} \theta_b^T \dot{\theta}_b + \\ & - \frac{\sigma_p}{2} \tilde{p}_{21}^2 + \frac{\sigma_p}{2} p_{21}^2 \leq -k_1 e_1^2 - \frac{p_1 k_2}{J_b} e_2^2 + \\ & - k_3 e_{3f}^2 - \frac{k_4 k_i J_r}{J_r k_i} e_{4f}^2 - \frac{\sigma_r}{2 \lambda_M(\Gamma_r^{-1})} \tilde{\theta}_r^T \Gamma_r^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_r + \\ & - \frac{\sigma_b}{2 \lambda_M(\Gamma_b^{-1})} \tilde{\theta}_b^T \Gamma_b^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_b - \frac{\sigma_p \gamma_p}{2} \tilde{p}_{21}^2 + \\ & + \frac{1}{2} \rho_3^2 + \frac{1}{2} \rho_4^2 + \frac{\sigma_r}{2} \theta_r^T \dot{\theta}_r + \frac{\sigma_b}{2} \theta_b^T \dot{\theta}_b + \frac{\sigma_p}{2} p_{21}^2 \leq \\ & \leq -k_m V + \Omega, \end{aligned}$$

gdzie

$$(65) \quad k_m = \min \left( 2k_1, 2 \frac{p_1 k_2}{J_b}, 2k_3, \frac{2k_4 k_i}{J_r}, \frac{\sigma_r}{\lambda_M(\Gamma_r^{-1})}, \frac{\sigma_b}{\lambda_M(\Gamma_b^{-1})}, \frac{\sigma_p \gamma_p}{2} \right),$$

$$(66) \quad \Omega = \frac{1}{2} \rho_3^2 + \frac{1}{2} \rho_4^2 + \frac{\sigma_r}{2} \theta_r^T \dot{\theta}_r + \frac{\sigma_b}{2} \theta_b^T \dot{\theta}_b + \frac{\sigma_p}{2} p_{21}^2.$$

Z tego wynika, że  $\dot{V} < 0$  na zewnątrz zwarteo zbioru

$$(67) \quad D = \left\{ v: V(v) \leq \frac{\Omega}{k_m} \right\} \text{ i } v = [e_1 \ e_2 \ e_{3f} \ e_{4f} \ \tilde{\theta}_r \ \tilde{\theta}_b \ \tilde{p}_{21}]^T,$$

więc trajektorie  $v$  są jednostajnie ostatecznie ograniczone (UUB) do zbioru  $D$  [17]. Promień zbioru  $D$  można zmniejszyć poprzez zwiększenie  $k_m$  czyli zwiększenie parametrów projektowych  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ ,  $k_4$ ,  $\Gamma_r$ ,  $\Gamma_b$  i  $\gamma_p$ . Z równań filtrów (35) i (44) wynika, że błędy  $e_3$  i  $e_4$  są ograniczone jeżeli ograniczone są błędy  $e_{3f}$  i  $e_{4f}$ . Parametry  $a_{13}$ ,  $a_{23}$ ,  $a_{14}$  i  $a_{24}$  filtrów wpływają na szybkość zanikania przebiegów przejściowych oraz ograniczenie błędu śledzenia. Zatem błędy  $e_3$  i  $e_4$  są także UUB.

**Autorzy:** dr inż. Marcin Jastrzębski, Politechnika Łódzka, Instytut Automatyki, ul. Stefanowskiego 18, 90-537, E-mail: marcin.jastrzebski@p.lodz.pl; dr inż. Przemysław Mosiołek, Politechnika Łódzka, Instytut Automatyki, ul. Stefanowskiego 18, 90-537, E-mail: przemyslaw.mosiolek@p.lodz.pl.

## LITERATURA

- [1] Li, P.; Wang, L., Zhong, B., Zhang, M., Linear Active Disturbance Rejection Control for Two-mass Systems via Singular Perturbation Approach, *IEEE Ind. Inform.* 2021, in press
- [2] Lozynskyy A., Chaban A., Perzyński T., Szafraniec A., Kasha L., Application of Fractional-Order Calculus to Improve the Mathematical Model of a Two-Mass System with a Long Shaft, *Energies* 2021, 14, 1854
- [3] Łuczak, D., Nonlinear Identification with Constraints in Frequency Domain of Electric Direct Drive with Multi-Resonant Mechanical Part, *Energies*, 2021, 14, 7190
- [4] Xie D., Huang Z., Ma Y., Vaziri V., Kapitaniak M., Wiercigroch., M. Nonlinear dynamics of lump mass model of drill-string in horizontal well, *Int. J. Mech. Sci.*, 174 (2020)
- [5] Imran R. M., Hussain D. M. A., Soltani M., DAC with LQR control design for pitch regulated variable speed wind turbine, *2014 IEEE 36th International Telecommunications Energy Conference (INTELEC)*, 2014, pp. 1-6
- [6] Ohnishi, K., Katsura, S., Shimono, T., Motion control for real-world haptics. *IEEE Ind. Electron. Mag.*, 2010, 4, 16-19
- [7] Inoue, Y., Katsura, S., Spatial disturbance suppression of a flexible system based on wave model, *IEEJ J. Ind. Appl.*, 2018, 7, 236-243
- [8] Szabat K., Orłowska-Kowalska T., Vibration suppression in a two-mass drive system using PI speed controller and additional feedbacks-comparative study, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 54 (2007), n.2, 1193-1206

- [9] Kamiński, M.; Szabat, K. Adaptive Control Structure with Neural Data Processing Applied for Electrical Drive with Elastic Shaft. *Energies* 2021, 14, 3389
- [10] Derugo P., Szabat K., Pajchrowski T., Zawirski K., Fuzzy Adaptive Type II Controller for Two Mass System, *Energies*, 2022, 15, 419
- [11] Kabziński J., Mosiołek P., Adaptive Control of Nonlinear Resonant Systems with Damping, *20th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR)*, 2015, 659-664
- [12] Abry F., Brun X., Sesmat S., Bideaux É., Ducat C., Electropneumatic Cylinder Backstepping Position Controller Design With Real-Time Closed-Loop Stiffness and Damping Tuning, *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, vol. 24, no. 2, pp. 541-552, 2016
- [13] Lijesh K. P., Harish H., Stiffness and Damping Coefficients for Rubber Mounted Hybrid Bearing, *Lubr. Sci.*, vol. 26, no. 5, pp. 301-314, Feb 2014
- [14] Kabziński J., Adaptive Control of Two-Mass Drive System with Nonlinear Stiffness and Damping, *In Proceedings of the IECON 2018—44th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*, Washington, DC, USA, 21–23 October 2018; pp. 2195–2200
- [15] Kabziński J., Mosiołek P., Adaptive Control of Two-Mass Drive System with Nonlinear Stiffness, *Przegląd Elektrotechniczny* nr 3, 2018, *Wydawnictwo SIGMA-NOT*, Warszawa, Poland, 2018
- [16] Kabziński J. Mosiołek P., Integrated, Multi-Approach, Adaptive Control of Two-Mass Drive with Nonlinear Damping and Stiffness, *Energies* 2021, 14(17), 5475
- [17] Kabziński J., Mosiołek P., Projektowanie Nieliniowych Układów Sterowania, *Nonlinear Control Design*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, Poland, 2018
- [18] Bao J., Liu P. X., Wang H., Zheng M., Zhao Y., Command Filtered Tracking Control for High-order Systems with Limited Transmission Bandwidth, *2021 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, 2021, pp. 8643-8648
- [19] Wang, C., Adaptive dynamic surface control of parametric uncertain and disturbed strict-feedback nonlinear systems. *Adv Differ Equ* 2019, 29 (2019)