

# Algorytm wyznaczania wypadkowej wartości niepewności rozszerzonej w przypadku analizy obejmującej wiele źródeł sygnałów błędów

**Streszczenie.** Artykuł przedstawia najważniejsze założenia zmodyfikowanej metody redukcyjnej arytmetyki interwałowej oraz wskazuje algorytm aplikacji tej metody. Omawiana metoda wykorzystywana jest w celu wyznaczania wartości wypadkowej niepewności rozszerzonej, a najważniejszy walor metody stanowi niska złożoność obliczeń. Przedstawiona metoda zapewnia wyniki zbliżone do tych uzyskiwanych metodą Monte-Carlo oraz znacznie bardziej dokładne, niż w przypadku klasycznego podejścia, opisanego w przewodniku JCGM. W artykule omówiono wady oraz zalety stosowania przedstawionej metody, a także wskazano okoliczności, w których stosowanie tej metody jest najbardziej korzystne.

**Abstract.** The article presents the most important assumptions of the modified reductive interval arithmetic method and indicates the application algorithm of this method. The method in question is used to determine the value of the resultant expanded uncertainty, and the most important advantage of the method is the low complexity of calculations. The presented method provides results similar to those obtained by the Monte-Carlo method and much more accurate than the classical approach described in the JCGM guide. The article discusses the advantages and disadvantages of using the presented method, and also indicates the circumstances in which the use of this method is most beneficial. **(An algorithm for determining the resultant expanded uncertainty value in the case of analysis involving multiple sources of error signals)**

**Słowa kluczowe:** niepewność rozszerzona, budżet niepewności, szacowanie niepewności, arytmetyka interwałowa  
**Keywords:** expanded uncertainty, uncertainty budget, uncertainty estimation, interval arithmetic

## Wstęp

Opracowując budżet niepewności dla analizowanej wielkości wyjściowej toru pomiarowego zauważyć można, że w większości przypadków w skład tego budżetu wchodzi wiele źródeł błędów. O ile wyznaczenie wypadkowej wartości niepewności standardowej jest zadaniem prostym i odpowiednio szczegółowo opisanym w przewodniku [1], o tyle wyznaczenie wypadkowej wartości niepewności rozszerzonej stanowi w pewnych przypadkach znacznie większy problem. Podejście klasyczne, proponowane w przewodniku [1], w celu oszacowania wartości wypadkowej niepewności rozszerzonej zakłada, że dla analizowanego przypadku spełnione zostały warunki centralnego twierdzenia granicznego – zakłada się zatem, że rozkład wartości realizacji wypadkowego sygnału błędu jest rozkładem normalnym.

Dla niespełnionych warunków centralnego twierdzenia granicznego stosowanie powyższych założeń skutkuje zatem uzyskaniem niedokładnych wyników. Analizując prace między innymi [2, 3] zauważyć można, że w pewnych okolicznościach, nawet jeśli dla wypadkowego sygnału błędu wielkości wejściowych toru pomiarowego spełnione są warunki centralnego twierdzenia granicznego, to fragmenty tego toru mogą wzmacniać lub tłumić wybrane składowe sygnały błędów. W efekcie, mimo normalnego rozkładu realizacji sygnału błędów na wejściu toru pomiarowego, na wyjściu tego toru może pojawić się rozkład o niestandardowym kształcie, odbiegający istotnie od kształtu rozkładu normalnego.

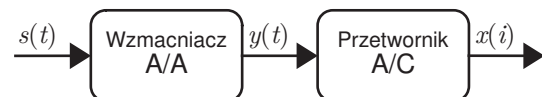
Mając na uwadze powyższe okoliczności, w pracy [4] zaproponowano metodę szacowania wartości wypadkowej niepewności rozszerzonej, bazującej na metodzie redukcyjnej arytmetyki interwałowej [5, 6]. Wskazana praca opisuje wprowadzoną modyfikację oraz jej wpływ na dokładność omawianej metody. Mimo, że w pracy przedstawiono w jaki sposób aplikować omawianą metodę, nie przedstawiono żadnego przykładu jej aplikacji. Dodatkowo, w omawianej pracy nie porównano wyników uzyskiwanych za pomocą proponowanej metody do wyników uzyskiwanych metodą opisaną w przewodniku [1].

Niniejsza praca ma na celu wskazanie, w jaki sposób aplikować proponowaną metodę analizy na wybranym przykładzie toru pomiarowego. Pracę podzielono na

6 rozdziałów. W rozdziale pierwszym przedstawiono motywację pracy i jej najważniejsze założenia. Rozdział drugi opisuje przykładowy tor pomiarowy, dla którego aplikowana jest omawiana metoda. W rozdziale trzecim przedstawiono, w jaki sposób wyznaczać wartości współczynników kształtu, natomiast w rozdziale czwartym opisano jak szacować wartości współczynników koherencji. Rozdział piąty opisuje proces wyznaczania wypadkowej wartości niepewności rozszerzonej, przy czym dla przedstawionego przykładu uzyskane wartości porównano z tymi uzyskanymi podejściem klasycznym [1] oraz metodą Monte-Carlo [7]. W rozdziale szóstym podsumowano najważniejsze wnioski płynące z pracy oraz zaproponowano dalsze kierunki badań.

## Przykładowy tor pomiarowy

Omawiany przykład zastosowania metody dotyczy toru pomiarowego, którego schemat przedstawiono na rysunku 1. Analizowany tor przetwarza zmienne w czasie napięcie wejściowe  $s(t)$ , gdzie na pierwszym etapie napięcie to jest wzmacniane przez wzmacniacz pomiarowy, a następnie w postaci napięcia  $y(t)$  podawane jest na wejście przetwornika analogowo-cyfrowego. Przetwornik analogowo-cyfrowy ze zintegrowanym układem próbkującym pamiętającym pobiera cyklicznie, co okres  $T_p$ , próbkę napięcia wejściowego  $y(t)$  i podaje na wyjście  $x(i)$  jej dyskretną reprezentację, wyrażoną w jednostce wielkości  $s(t)$ . Zakłada się, że czułość wielkości  $x(i)$  w stosunku do wielkości  $s(t)$  wynosi 1 V/V.



Rysunek 1. Schemat blokowy przykładowego toru pomiarowego

Dla przedstawionego toru pomiarowego zakłada się, że wielkość  $s(t)$  zakłócona jest sygnałem błędów w postaci szumu białego, którego wariancja przeniesiona do wielkości  $x(i)$  wynosi  $\sigma_{x,r}^2$ . Wzmacniacz pomiarowy wprowadza do wielkości wyjściowej składową stałą w postaci dryftu zera, spowodowanego zmianami temperatury, której wariancja przeniesiona do wielkości  $x(i)$  wynosi  $\sigma_{x,s}^2$ . Dodatkowo przetwornik analogowo-cyfrowy wprowadza do wielkości wyjściowej błąd związany z kwantowaniem,

kórego wariancja wynosi  $\sigma_{x,q}^2$ . Przyjęto, że rozkład realizacji sygnału szumi białego jest rozkładem normalnym ( $n$ ), rozkład realizacji sygnału błędu związanego z dryftem zera jest rozkładem trójkątnym ( $t$ ), natomiast błąd kwantowania cechuje się jednostajnym ( $u$ ) rozkładem wszystkich wartości realizacji. Zakłada się, że omówione sygnały błędów nie są ze sobą skorelowane.

Wartości niepewności rozszerzonych, związanych ze wskazanymi sygnałami błędów, wynoszą zatem kolejno [1]:

$$\begin{aligned} (1) \quad & U_{x,r} = c_n \sigma_{x,r}, \\ (2) \quad & U_{x,s} = c_t \sigma_{x,s}, \\ (3) \quad & U_{x,q} = c_u \sigma_{x,q}, \end{aligned}$$

przy czym symbolem  $c_*$  oznaczono współczynnik rozszerzenia dla wybranego rozkładu, odpowiedni dla założonego poziomu ufności. Wartości współczynników rozszerzenia w funkcji wartości przyjętego poziomu ufności dla wybranych rozkładów opisano szczegółowo w pracy [8].

Przedstawiony przykład jest uproszczony ze względu na fakt, że jego istotą jest przedstawienie, w jaki sposób aplikować omawianą metodę szacowania wartości wypadkowej niepewności rozszerzonej. Wskazany model toru pomiarowego mógłby w uproszczeniu modelować właściwości np. multimetru cyfrowego. Złożony przykład modelu błędu toru pomiarowego, obejmujący analizę rzeczywistego toru, przedstawiono w pracy [3].

#### Wyznaczanie wartości współczynników kształtu

Zgodnie z propozycją zawartą w pracy [4], w celu aplikacji omawianej metody w pierwszej kolejności wyznaczyć należy wartości współczynników kształtu  $s_{a,b}$ . Wartości tych współczynników wyznaczone są dla par sygnałów o wybranych kształtach funkcji gęstości prawdopodobieństwa oraz identycznej wartości niepewności rozszerzonej dla zadanego poziomu ufności  $1 - \alpha$ . Można zatem zauważyć, że aby przygotować odpowiedni zestaw wartości współczynników kształtu należy określić, jakie rodzaje funkcji gęstości prawdopodobieństwa związane z sygnałami błędów będą występowały w analizowanym torze pomiarowym. Na omawianym etapie analizy nie jest natomiast istotna liczba sygnałów błędów oraz wartości niepewności rozszerzonych tych sygnałów.

Dla przykładu opisanego w poprzednim rozdziale wyróżnić można trzy rodzaje rozkładów: normalny ( $n$ ), jednostajny ( $u$ ) i trójkątny ( $t$ ). Zgodnie z właściwością, gdzie  $s_{a,b} = s_{b,a}$ , należy zatem wyznaczyć wartości dla:  $s_{n,u} = s_{u,n}$ ,  $s_{n,t} = s_{t,n}$ ,  $s_{u,t} = s_{t,u}$ . Jeżeli któryś z rozkładów występowałby w przypadku więcej niż jednego sygnału, należałoby wyznaczyć współczynnik kształtu dla pary sygnałów o wskazanym kształcie (np. dla dwóch sygnałów o rozkładzie normalnym należałoby wyznaczyć wartość współczynnika  $s_{n,n}$ ).

Najbardziej uniwersalną procedurą wyznaczania wartości współczynników kształtu jest metoda Monte-Carlo. Metoda ta pozwala na wyznaczenie wartości współczynnika kształtu zarówno dla sygnałów, których kolejne wartości realizacji mogą zostać wygenerowane symulacyjnie, jak i w przypadku sygnałów, których wartości realizacji pozyskano pomiarowo. Zakładając, że analizowana jest para sygnałów błędów  $e_a(i)$  oraz  $e_b(i)$  procedura wyznaczania wartości współczynnika kształtu  $s_{a,b}$  przebiega następująco:

1. Pozyskaj pomiarowo lub wygeneruj  $N \geq 100\,000$  wartości realizacji sygnałów  $e_a(i)$  oraz  $e_b(i)$ .
2. Znormalizuj pozyskane wartości realizacji sygnałów  $e_a(i)$  oraz  $e_b(i)$  w ten sposób, aby wartości niepewności

rozszerzonych  $U_a$  oraz  $U_b$  były jednakowe dla wybranego poziomu ufności  $1 - \alpha$ .

3. Wyznacz kolejne  $N$  wartości realizacji sygnału  $e_{a,b}(i) = e_a(i) + e_b(i)$  dla  $i \in [0; 1 - N]$ .
4. Wyznacz wartość niepewności rozszerzonej  $U_{a,b}$  na podstawie histogramu uzyskanych wartości realizacji sygnału  $e_{a,b}(i)$  dla wybranego poziomu ufności  $1 - \alpha$ .
5. Wyznacz wartość współczynnika kształtu  $s_{a,b}$  dla analizowanej pary sygnałów zgodnie z równaniem

$$(4) \quad s_{a,b} = s_{b,a} = \frac{U_{a,b}^2 - U_a^2 - U_b^2}{2U_a U_b}.$$

Wskazaną procedurę zaleca się wykonać około 1000 razy dla analizowanej pary sygnałów, a jako wartość współczynnika  $s_{a,b}$  zaleca się przyjąć średnią wartości uzyskanych dla przeprowadzonych iteracji. Bardzo istotne jest, aby w punkcie 2 przemnożyć uzyskane wartości realizacji jednego z sygnałów o taki współczynnik, który pozwoli uzyskać równe wartości niepewności rozszerzonych dla obydwóch sygnałów. Opisana procedura jest jednorazowa, a uzyskane wartości współczynników kształtów mogą zostać zapisane w postaci tabeli i użyte dla innego toru pomiarowego. Należy jednak pamiętać, że wyznaczone w ten sposób wartości są właściwe jedynie dla przyjętego wcześniej poziomu ufności  $1 - \alpha$ .

#### Wyznaczanie wartości współczynników koherencji

Aby oszacować wartość współczynników koherencji, niezbędnych do oszacowania wartości wypadkowej niepewności rozszerzonej, należy zastosować wyznaczone w poprzednim rozdziale wartości współczynników kształtu, skorygowane w oparciu o aktualne parametry analizowanych sygnałów błędów. Omawiane wartości szacowane są zgodnie z równaniem [4]

$$(5) \quad h_{i,j} = s_{i,j} \sqrt{\frac{\min(U_i, U_j)}{\max(U_i, U_j)}} \left( \frac{U_i^2 + U_j^2}{\sum_{k=0}^{N-1} U_k^2} \right),$$

a zatem dla toru pomiarowego opisanego w rozdziale drugim zachodzi:

$$(6) \quad h_{r,s} = s_{n,t} \sqrt{\frac{\min(U_r, U_s)}{\max(U_r, U_s)}} \left( \frac{U_r^2 + U_s^2}{U_r^2 + U_s^2 + U_q^2} \right),$$

$$(7) \quad h_{r,q} = s_{n,u} \sqrt{\frac{\min(U_r, U_q)}{\max(U_r, U_q)}} \left( \frac{U_r^2 + U_q^2}{U_r^2 + U_s^2 + U_q^2} \right),$$

$$(8) \quad h_{s,q} = s_{t,n} \sqrt{\frac{\min(U_s, U_q)}{\max(U_s, U_q)}} \left( \frac{U_s^2 + U_q^2}{U_r^2 + U_s^2 + U_q^2} \right).$$

Można zauważyć, że obliczenia przeprowadzane w równaniach od (6) do (8) nie są skomplikowane i z łatwością mogą zostać zaimplementowane dla mikrokontrolera, będącego częścią toru pomiarowego [9, 10]. Ewentualna zmiana liczby analizowanych sygnałów błędów lub wartości niepewności rozszerzonych związanych z tymi sygnałami wymaga jedynie ponownego wyznaczenia wartości współczynników koherencji, zgodnie z równaniem (5). Istotną wadę przedstawionego sposobu szacowania wartości współczynników koherencji stanowi natomiast konieczność wstępnego wyznaczenia wartości współczynników kształtu i konieczność posiadania wiedzy na temat rodzajów możliwych rozkładów analizowanych sygnałów błędów.

## Wyznaczanie wartości niepewności rozszerzonej

Ostatni etap analizy obejmuje wyznaczenie wartości wypadkowej niepewności rozszerzonej. Czynność ta odbywa się zgodnie z równaniem [4, 6, 11]

(9)

$$U_{\Sigma} = \sqrt{\begin{bmatrix} U_0 \\ \vdots \\ U_{N-1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & \cdots & h_{0,N-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N-1,0} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0 \\ \vdots \\ U_{N-1} \end{bmatrix}},$$

a zatem dla przykładowego toru pomiarowego, opisanego w rozdziale drugim, zachodzi:

$$(10) \quad U_x = [U_{x,r} \quad U_{x,s} \quad U_{x,q}],$$

$$(11) \quad h_x = \begin{bmatrix} 1 & h_{r,s} & h_{r,q} \\ h_{s,r} & 1 & h_{s,q} \\ h_{q,r} & h_{q,s} & 1 \end{bmatrix},$$

$$(12) \quad U_{x,\Sigma,a} = \sqrt{U_x \cdot h_x \cdot U_x^T},$$

przy czym stosując metodologię proponowaną w przewodniku [1], tą samą wielkość oszacować można zgodnie z równaniem

$$(13) \quad U_{x,\Sigma,b} = c_n \sqrt{\sigma_{x,r}^2 + \sigma_{x,s}^2 + \sigma_{x,q}^2}.$$

Aby zweryfikować skuteczność metod opisanych w równaniach (12) oraz (13) przeprowadzono eksperyment metodą Monte-Carlo. Każda iteracja eksperymentu składała się z następujących kroków:

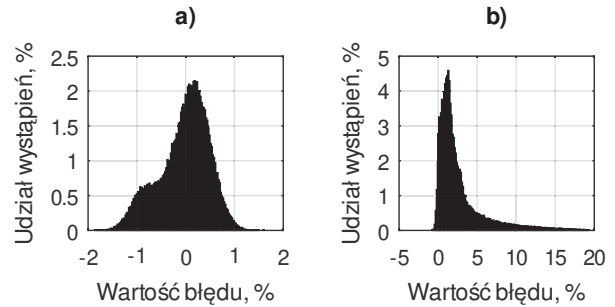
1. Wygenerowania  $N = 100\,000$  kolejnych wartości realizacji sygnałów błędów  $e_{x,r}(i)$ ,  $e_{x,s}(i)$ ,  $e_{x,q}(i)$ , opisanych w rozdziale drugim, w ten sposób aby wartości niepewności rozszerzonych dla poziomu ufności  $1 - \alpha$ , związane z tymi sygnałami, przyjmowały wartości losowane z przedziału  $U_{x,*} \in [1; 25]$  V.
2. Wyznaczenia kolejnych wartości realizacji sygnału  $e_{x,\Sigma}(i) = e_{x,r}(i) + e_{x,s}(i) + e_{x,q}(i)$ , stanowiącego sumę wartości dla  $i$ -tych realizacji sygnałów błędów opisanych w punkcie 1.
3. Wyznaczenia wartości niepewności rozszerzonej  $U_{x,\Sigma,s}$  na podstawie histogramu uzyskanych wartości realizacji sygnału  $e_{x,\Sigma}(i)$  dla poziomu ufności  $1 - \alpha$ .
4. Wyznaczenia wartości wypadkowej niepewności rozszerzonej  $U_{x,\Sigma,*}$ , stosując metody opisane w równaniach (12) oraz (13).
5. Wyznaczeniu względnego błędu oszacowania wartości niepewności rozszerzonej  $U_{x,\Sigma,*}$  w stosunku do wartości referencyjnej  $U_{x,\Sigma,s}$ :  $\frac{U_{x,\Sigma,*} - U_{x,\Sigma,s}}{U_{x,\Sigma,s}} \cdot 100\%$ .

Na podstawie 100 000 iteracji opisanego eksperymentu sporządzono histogram wartości realizacji względnego błędu oszacowania wartości wypadkowej niepewności rozszerzonej dla proponowanej metody analizy oraz dla metody opisanej w przewodniku [1], który przedstawiono na rysunku 2. W tabeli 1 przedstawiono wartości prawego i lewego przedziału niepewności rozszerzonej dla uzyskanych wartości wielkości opisanej w równaniu (14), a także odchylenie standardowe i średnią wartość tej wielkości dla przeprowadzonych iteracji eksperymentu. Niepewność rozszerzoną w równaniach (12) oraz (13) wyznaczano dla poziomu ufności 95%. Analizując uzyskane wyniki zauważyć można, że stosowanie proponowanej

metody w porównaniu do metody opisanej w przewodniku [1] pozwala uzyskać znacznie dokładniejsze wyniki. Zauważyć można również mniejszy rozrzut wartości względnego błędu oszacowania wartości wypadkowej niepewności rozszerzonej.

Tabela 1. Parametry uzyskanych symulacyjnie wartości realizacji względnego błędu oszacowania wartości wypadkowej niepewności rozszerzonej: **a)** stosując równanie (12) oraz **b)** stosując równanie (13); przyjęty poziom ufności wynosił 95%

Metoda	$U_{\delta,-}$ , %	$U_{\delta,+}$ , %	$\bar{\delta}$ , %	$\sigma_{\delta}$ , %
<b>a)</b>	-1,04	0,97	-0,03	0,51
<b>b)</b>	-0,77	10,06	2,76	3,21



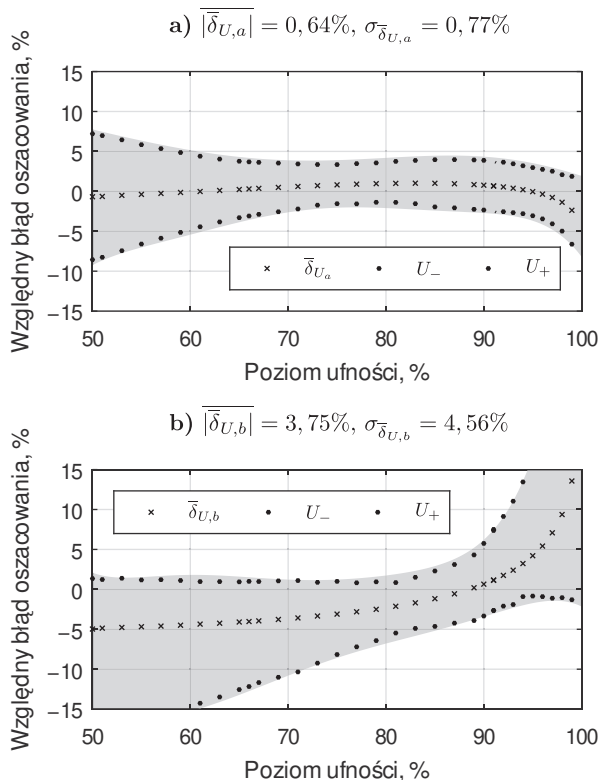
Rysunek 2. Histogram uzyskanych symulacyjnie wartości realizacji względnego błędu oszacowania wartości wypadkowej niepewności rozszerzonej: **a)** stosując równanie (12) oraz **b)** stosując równanie (13); przyjęty poziom ufności wynosił 95%

Aby potwierdzić wnioski wysunięte z przeprowadzonego eksperymentu, omawiany eksperyment wykonano ponownie. Zamiast stałej liczby sygnałów błędów dla każdej iteracji eksperymentu losowano liczbę analizowanych sygnałów z przedziału  $N \in [2; 5]$ . Dodatkowo, dla każdego z  $N$  sygnałów losowano rozkład tego sygnału z puli rozkładów: normalnego, trójkątnego, jednostajnego oraz dwumodalnego (rozkładu funkcji sinus) oraz wartości niepewności rozszerzonej z przedziału  $U_i \in [1; 30]$  V. Eksperyment wykonano dla poziomu ufności  $1 - \alpha \in [50; 99]$  %, przy czym dla każdej wartości poziomu ufności wykonywano 100 000 iteracji eksperymentu. Wyniki eksperymentu przedstawiono na rysunku 3, przy czym wyznaczone wartości  $U_+$  oraz  $U_-$  dotyczą prawego i lewego przedziału niepewności rozszerzonej dla poziomu ufności 95%, związanej z wielkością  $\delta U_{*,*}$ , która została opisana w równaniu (14).

Analizując wyniki przedstawione na rysunku 3 zauważyć można, że potwierdzone zostały wnioski wyciągnięte z poprzedniego eksperymentu. Stosowanie przedstawionej metody analizy zapewnia dla dowolnego poziomu ufności wyniki znacznie bardziej zbliżone do tych uzyskiwanych metodą Monte-Carlo, niż w przypadku metody opisanej w przewodniku [1]. Zarówno średnia wartości bezwzględnych, jak i odchylenie standardowe względnego błędu oszacowania wartości niepewności rozszerzonej są mniejsze, niż w przypadku podejścia klasycznego. Oznacza to, że wyniki są nie tylko bardziej dokładne, ale i rozrzut uzyskiwanych wartości błędów jest mniejszy. Można również zauważyć, że dla przedziałów ufności  $1 - \alpha \in [60; 97]$  % znaczna większość wyników została oszacowana z dokładnością nie gorszą od  $\pm 5\%$ .

## Wnioski

Porównując wyniki przedstawionej metody do podejścia klasycznego [1] zauważyć można, że dla wartości poziomu ufności około 95% stosowanie tej metody jest zasadne tam, gdzie wymagane jest oszacowanie wypadkowej



Rysunek 3. Porównanie skuteczności metod: a) zaproponowanej w pracy oraz b) opisanej w przewodniku [1]

wartości niepewności rozszerzonej ze względnym błędem nieprzekraczającym  $\pm 5\%$ . Jeżeli natomiast dopuszcza się sytuację, gdzie błąd ten może przekraczać wartości  $\pm 10\%$ , stosować należy podejście klasyczne. Biorąc pod uwagę wyniki przeprowadzonych badań stwierdzić można, że proponowana metoda stanowi bardzo dobrą alternatywę dla metod analitycznych, opisanych między innymi w pracach [12, 13, 14], czy metody Monte-Carlo, opisanej w [7, 15], zapewniając odpowiedni kompromis pomiędzy stopniem skomplikowania, a dokładnością uzyskiwanych wyników, co potwierdzają również wyniki opisane wcześniej w pracy [4].

Szczególnie istotnym obszarem zastosowań omówionej metody są przypadki, kiedy jeden z elementów toru pomiarowego stanowi algorytm przetwarzania danych. Jak pokazano w pracach [2, 3] w pewnych okolicznościach warunki centralnego twierdzenia granicznego dla sygnałów błędów wielkości wyjściowych tych torów może nie być spełnione, mimo ich spełnienia dla sygnałów błędów wielkości wejściowych. W takim przypadku podejście klasyczne związane jest z bardzo dużą niedokładnością oszacowania wartości wypadkowej niepewności rozszerzonej.

Przedstawiona metoda analizy umożliwia znacznie bardziej dokładne oszacowanie wartości wypadkowej niepewności rozszerzonej, niż metoda zaproponowana w przewodniku [1]. Istotną cechą metody jest niski stopień skomplikowania obliczeń, również w przypadku zmiany parametrów sygnałów błędów oraz ich liczby. Główną wadą metody stanowi natomiast konieczność wstępnego wyznaczenia wartości współczynników kształtu, natomiast operacja ta jest jednorazowa i może być przeprowadzona niezależnie. Dodatkową wadą metody jest wyższy stopień skomplikowania w przypadku analizy skorelowanych sygnałów błędów, co omówiono w pracy [4].

Dalsze prace badawcze dotyczyć będą poprawy skuteczności metody i przedstawienia bardziej dokładnego sposobu oszacowania wartości współczynników koherencji, niż zaproponowano w pracy [4]. Dodatkowo zaproponować należy metodę szacowania wartości współczynników koherencji, która będzie odpowiednia dla skorelowanych sygnałów błędów i cechować się będzie równie niewielkim stopniem skomplikowania, jak ta opisana w równaniu (5).

**Autorzy:** mgr inż. Łukasz Drózdź, dr hab. inż. Jerzy Roj prof. PŚ, Katedra Metrologii, Elektroniki i Automatyki, Wydział Elektryczny, Politechnika Śląska, ul. Akademicka 10, 44-100 Gliwice, email: lukasz.drozd@polsl.pl, jerzy.roj@polsl.pl

#### LITERATURA

- [1] Joint Committee for Guides in Metrology.: Evaluation of measurement data, Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, JCGM, 2008.
- [2] M. Kampik, J. Roj i Ł. Drózdź.: Estimation of the resultant expanded uncertainty of the output quantities of the measurement chain using the discrete wavelet transform algorithm, *Applied Sciences* 14.9 (2024).
- [3] M. Kampik, J. Roj i Ł. Drózdź.: Error Model of a Measurement Chain Containing the Discrete Wavelet Transform Algorithm, *Applied Sciences* 14.8 (2024).
- [4] Ł. Drózdź i J. Roj.: Zastosowanie metody redukcyjnej arytmetyki interwałowej do bieżącej oceny właściwości metrologicznych toru pomiarowego, *Przegląd Elektrotechniczny* 99.12 (2023), s. 83–86.
- [5] J. Jakubiec.: Redukcyjna arytmetyka interwałowa w zastosowaniu do wyznaczania niepewności algorytmów przetwarzania danych pomiarowych, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, 2002.
- [6] J. Jakubiec.: Reductive interval arithmetic application to uncertainty calculation of measurement result burdened correlated errors, *Metrology and Measurement Systems* 10.2 (2003), s. 137–156.
- [7] Joint Committee for Guides in Metrology.: Evaluation of measurement data, Propagation of distributions using a Monte Carlo method, JCGM, 2008.
- [8] V. Horálek.: Analysis of basic probability distributions, their properties and use in determining type B evaluation of measurement uncertainties, *Measurement* 46.1 (2013), s. 16–23.
- [9] D. S. Reay.: Digital Signal Processing Using the ARM Cortex M4, John Wiley & Sons, 2015.
- [10] CMSIS-DSP, Embedded compute library for Cortex-M and Cortex-A, ARM Limited, 2023.
- [11] J. Jakubiec.: Błędy i niepewności danych w systemie pomiarowo-sterującym, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, 2010.
- [12] G. Koliander, Y. El-Laham, P. M. Djurić i F. Hlawatsch.: Fusion of probability density functions, *Proceedings of the IEEE* 110.4 (2022), s. 404–453.
- [13] Z. Zhang, J. Wang, C. Jiang i Z. L. Huang.: A new uncertainty propagation method considering multimodal probability density functions, *Structural and Multidisciplinary Optimization* 60 (2019), s. 1983–1999.
- [14] M. K. Urbanski i J. Wąsowski.: Fuzzy approach to the theory of measurement inexactness, *Measurement* 34.1 (2003), s. 67–74.
- [15] H. Janssen.: Monte-Carlo based uncertainty analysis: Sampling efficiency and sampling convergence, *Reliability Engineering & System Safety* 109 (2013), s. 123–132.