

Metoda ze zmianą zmiennych dla dopasowania funkcji nieliniowych do danych pomiarowych i ich niepewności

Streszczenie. W artykule przedstawiono metodę wyznaczania parametrów i oceny pasm niepewności funkcji nieliniowych dopasowanych do danych pomiarowych w badanych punktach. Wykorzystuje się w niej linearyzację funkcji przez zmianę zmiennych i regresję liniową. Podano przykłady wyznaczania tą metodą parametrów i pasm niepewności funkcji nieliniowych o różnych postaciach, w tym uważanych dotychczas za nienadające się do linearyzacji oraz uwikłanych. Omówiono zakres stosowania tej metody w metrologii i technice pomiarowej.

Abstract. The article presents a method for determining the parameters and evaluation of the uncertainty bands of nonlinear functions matched to the measurement data of the tested points. It uses the linearization of functions by variable change and linear regression. Examples of determining the parameters and uncertainty bands of nonlinear functions of various forms, including those previously considered unsuitable for linearization and implicit function, are given. The scope of application of the method in metrology and measurement technology is discussed.

Variable Swap Method for Fitting Nonlinear Functions to Measurement Data and Their Uncertainties

Słowa kluczowe: regresja liniowa funkcji nieliniowych, dopasowanie do danych mierzonych, kryterium ważonych najmniejszych kwadratów WTLS, pasmo niepewności.

Keywords: linear regression of nonlinear functions, fit to measured data, WTLS weighted least squares criterion, uncertainty band.

1. Wstęp

W praktyce metrologicznej (np. wzorcowanie i sprawdzanie okresowe oraz badania charakterystyk systemów, przyrządów i czujników pomiarowych) należy wyznaczać rzeczywiste wartości parametrów i ich niepewności. Charakterystyki nominalne wielu czujników, przetworników i przyrządów pomiarowych, a także zależności parametrów badanych zjawisk, właściwości materiałów, charakterystyki urządzeń i ich elementów opisuje się funkcjami nieliniowymi. Charakterystyki te i ich niepewności są również porównywane z danymi nominalnymi, by sprawdzić spełnianie określonych wymagań. Konieczne jest wówczas wyznaczenie parametrów funkcji nieliniowych dopasowanych do danych pomiarowych, a także oszacowanie ich niepewności wyznaczonych zwykle według zaleceń Przewodnika GUM [1] i jego Suplementów. Parametry tylko nielicznych funkcji nieliniowych np. parabol, można analitycznie dostosować do danych pomiarowych. Istnieje też wiele wyspecjalizowanych metod i algorytmów numerycznych [2-7]. Najstarszą jest metoda Gaussa–Newtona z 1809 r. Następnie powstały metody quasi-newtonowskie Davidsona, Fletchera i Powella, Levenberga–Marquardta, metody BFGS oraz ogólna metoda numerycznego rozwiązywania równań nieliniowych Raphsona–Newtona. Metody te są skomplikowane i nie na tyle uniwersalne, by stosować je szeroko w metrologii i w pomiarach rutynowych. Dlatego też dla dopasowywania funkcji nieliniowych do danych pomiarowych priorytet dajemy omawianej w tej pracy metodzie z linearyzacją funkcji przez zmianę zmiennych jako dosyć prostej, wystarczająco dokładnej i uniwersalnej [9 -12].

Głównym narzędziem matematycznym do dopasowywania parametrów funkcji do zmierzonych wartości współrzędnych badanych punktów jest metoda regresji liniowej. Jest ona liniowa względem poszukiwanych parametrów tej funkcji. Z pomiarów otrzymuje się współrzędne badanych punktów, a z informacji o obiekcie mierzonym i użytej w eksperymencie aparaturze pomiarowej - ich niepewności standardowe i rozszerzone oraz współczynniki korelacji wzajemnych i autokorelacji wyników pomiarów. Niepewności mierzonych punktów należy szacować według zasad przewodnika o ang. akronimie GUM [1]. Wyznacza się parametry funkcji opisującej eksperyment i obiekt badany oraz granice jej pasma (korytarza)

niepewności o określonym prawdopodobieństwie. Jako kryterium stosuje się różne warianty najmniejszej sumy kwadratów, w tym jego najbardziej ogólną ważoną postać ϕ_{xy} o akronimie WTLS (ang. *weighted total least squares*). Wartość funkcji kryterialnej ϕ_{xy} dla dopasowania n -wymiarowych wektorów odchyłeń ΔX i ΔY współrzędnych punktów badanych od funkcji poszukiwanej opisuje macierzowe równanie z odwróconą główną macierzą kowariancji U^{-1} :

$$(1) \quad \phi_{xy}(\Delta X, \Delta Y) = [\Delta X, \Delta Y] \begin{bmatrix} U_X & U_{XY} \\ U_{XY}^T & U_Y \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \end{bmatrix} \rightarrow \min$$

gdzie: elementami macierzy głównej $U = \begin{bmatrix} U_X & U_{XY} \\ U_{XY}^T & U_Y \end{bmatrix}$ są macierze $n \times n$:

$$(1a) \quad U_X = \begin{bmatrix} u_{x_1}^2 & \dots & \rho_{x_{1n}} u_{x_1} u_{x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \rho_{x_{1n}} u_{x_n} u_{x_1} & \dots & u_{x_n}^2 \end{bmatrix},$$

$$(1b) \quad U_Y = \begin{bmatrix} u_{y_1}^2 & \dots & \rho_{y_{1n}} u_{y_1} u_{y_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \rho_{y_{1n}} u_{y_n} u_{y_1} & \dots & u_{y_n}^2 \end{bmatrix},$$

$$(1c) \quad U_{XY} = \begin{bmatrix} \rho_{x_1 y_1} u_{x_1} u_{y_1} & \dots & \rho_{x_{1n} y_1} u_{x_n} u_{y_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \rho_{x_1 y_n} u_{x_1} u_{y_n} & \dots & \rho_{x_n y_n} u_{x_n} u_{y_n} \end{bmatrix}$$

Wzór (1) uwzględnia dane pomiarowe wszystkich badanych punktów, ich niepewności standardowe i kowariancje wyników pomiarów ich współrzędnych. Macierze U_X , U_Y i U_{XY} zawierają niepewności standardowe u_{x_i} , u_{y_j} współrzędnych x_i , y_j i wszystkie możliwe kowariancje o współczynnikach autokorelacji $\rho_{x_{ik}}$, $\rho_{y_{jl}}$ i korelacji wzajemnej $\rho_{x_i y_j}$ dla $i, j, k, l = 1, \dots, n$.

Właściwe dopasowanie do danych punktów pomiarowych określonej krzywej, nawet o prostej postaci $y = f(x)$, osiąga się dla minimum globalnego jednej lub obu zmiennych x, y według funkcji kryterialnej (1). Zastosowanie kryterium najmniejszych kwadratów, w tym o postaci WTLS, dla różnych przypadków dopasowania funkcji liniowych do danych pomiarowych metodą regresji liniowej omówiono w [4 - 7], [P4 - P7]. Regresję tę można stosować

bezpośrednio tylko dla nielicznych funkcji nieliniowych, tj. dla rozwijalnych w szereg potęgowy. Dla większości funkcji nieliniowych brakuje metod analitycznych i trzeba stosować różne metody numeryczne [2].

Znacznie mniej ograniczeń ma omawiana poniżej metoda z linearyzacją funkcji nieliniowej przez zmianę jej zmiennych. Na przykład nieliniową funkcję dwu zmiennych x i y można zmienić w liniową przez wprowadzenie odpowiednich nowych zmiennych ξ , ψ . Następnie jej parametry jako prostej dostosowuje się do przeliczonych wartości współrzędnych badanych punktów dla minimum ważonej średniej kwadratowej WTLS. Z parametrów tej prostej i jej pasma niepewności wynikają poszukiwane parametry i pasmo niepewności funkcji nieliniowej. Omówimy metodę ze zmianą zmiennych i podamy kilka przykładów jej zastosowania.

2. Podstawy matematyczne metody zmiany zmiennych

Metoda, o proponowanej nazwie - zmiany zmiennych, polega na przekształceniu funkcji nieliniowej $F(x, y) = 0$ w funkcją liniową w nowych współrzędnych kartezjańskich ξ , ψ . Współrzędne badanych punktów mierzy się z niepewnościami standardowymi $u_i = \sqrt{(u_{Ai})^2 + (u_{Bi})^2}$ wyznaczanymi według zasad przewodnika GUM [1]. Niepewności u_{Ai} wynikają ze statystyki rozproszenia powtarzanych wyników pomiarów każdego punktu, a niepewności u_{Bi} opisują zrandomizowany wpływ na wyniki nieznanymi błędów systematycznych użytych przyrządów i urządzeń o znanych dopuszczalnych wartościach ich błędów. Szacuje się też wpływy autokorelacji i wzajemnych korelacji tych wyników, jeśli występują one w pomiarach lub są spodziewane w przyszłości. Następnie znajduje się parametry linii prostej dopasowanej do nowych współrzędnych ξ_i , ψ_i badanych punktów według kryterium najmniejszych kwadratów oraz wyznacza funkcje opisujące granice pasm (korytarzy) niepewności standardowej i rozszerzonej tej prostej. Korzystając z funkcji odwrotnej wiążącej oba rodzaje współrzędnych funkcji nieliniowej wyznacza się jej parametry i granice pasm niepewności w układzie współrzędnych X OY ,

W praktyce pomiarowej stosuje się wiele różnych rodzajów eksperymentów pomiarowych. Najczęściej mierzy się tylko jedną współrzędną punktów badanych, np. rzędną y_i , a wartości drugiej, czyli odciętej x_i są zadawane dokładnie. Jeśli mierzy się obie zmienne x i y , to zbiory ich wyników mogą być zarówno nieskorelowane, jak i w różnym stopniu skorelowane wzajemnie. Może też występować autokorelacja dla każdej współrzędnej.

Funkcje nieliniowe zmiennych x , y mogą mieć wiele postaci. Autorzy sprawdzili zastosowanie linearyzacji metodą zmiany zmiennych dla kilku różnych przykładów funkcji nieliniowych i różnych możliwych sposobów zmiany zmiennych. Wyznaczono wartości parametrów, ich niepewności i pasma niepewności funkcji nieliniowych o trzech rodzajach postaci:

- najprostsza - pomiary tylko zmiennej zależnej y przy zadawanych wartościach zmiennej x , tj. $y = f(x)$,
- funkcje zmiennych są sobie równe, tj. $\psi(y) = f(x)$,
- postać funkcji jest uwikłana $H(x, y) = 0$.

Omówimy zastosowanie metody dla każdej z tych postaci.

Dla funkcji nieliniowej $y = f(x)$ równanie prostej w nowych współrzędnych ψ , ξ ma ogólną postać liniową:

$$(2) \quad \psi(y, \beta) = \theta_1 \xi(x, \beta) + \theta_0$$

Parametry równania (2) dopasowuje się metodą regresji liniowej do danych pomiarowych badanych punktów po zmianie ich współrzędnych na nowe ψ , ξ , wg kryterium najmniejszych kwadratów WTLS. Z kryterium (1) wyznacza

się parametry θ_1 , θ_0 , β funkcji liniowej (2). Transformuje się też funkcja zawierająca macierz kowariancji i będzie wyrażać niepewności w nowych współrzędnych. Zakłada się, że są spełnione prawa propagacji błędów i niepewności. Oznacza to stosowanie tylko pierwszych pochodnych funkcji przy ich transformacji. Wskutek tego otrzymuje się w przybliżeniu identyczną wartość funkcji kryterialnej dla regresji prostej w nowych współrzędnych i dla dopasowania krzywej nieliniowej w jej współrzędnych. Niepewności w nowych współrzędnych kartezjańskich wynikają pośrednio z przybliżenia liniowego $u(\psi) \approx |\psi'(y, \beta)|u(y)$ i $u(\xi) \approx |\xi'(x, \beta)|u(x)$. Wzór (1) przyjmuje postać:

$$(3) \quad \phi_{xy}(\Delta X, \Delta Y) = [\Delta X, \Delta Y] L L^{-1} \begin{bmatrix} U_X & U_{XY} \\ U_{XY}^T & U_Y \end{bmatrix}^{-1} L^{-1} L \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \end{bmatrix} \approx \approx \phi_{\psi\xi}(\Delta\xi, \Delta\psi, \beta) = [\Delta\xi, \Delta\psi] \begin{bmatrix} U_\xi & U_{\xi\psi} \\ U_{\xi\psi}^T & U_\psi \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Delta\xi \\ \Delta\psi \end{bmatrix}$$

gdzie

$$(4) \quad L = \begin{bmatrix} \xi'(x_1, \beta) & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \xi'(x_n, \beta) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \psi'(y_1, \beta) & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \psi'(y_n, \beta) \end{bmatrix}$$

Dane pomiarowe punktów i macierze kowariancji w nowych współrzędnych wyznaczają odpowiednio wartości wektorów ξ i ψ oraz macierzy U_ξ , U_ψ , $U_{\xi\psi}$. Parametrem nieznanym jest tu jedynie β . Aby zminimalizować funkcję kryterialną $\phi_{\psi\xi}$ należy wybrać stałą wartość β . Można przyjąć, że niepewność tej operacji jest pomijalnie mała, tj. $u(\beta) \approx 0$. Przekształcając wektory X , X_p , $\Delta X = X - X_p$ i Y , Y_p , $\Delta Y = Y - Y_p$ odpowiednio w wektory ξ , ξ_p , $\Delta\xi = \xi - \xi_p$ i ψ , ψ_p , $\Delta\psi = \psi - \psi_p$ za pomocą wzorów (2) i (4) dla dopasowania funkcji nieliniowej, otrzymuje się układ dwóch równań (5). Opisują one minimalizację nowej funkcji kryterialnej $\phi_{\psi\xi}$ i równanie wektorowe punktów prostej.

$$(5) \quad \begin{cases} \phi_{\psi\xi}(\Delta\xi, \Delta\psi, \beta) \rightarrow \min \\ \Psi_p = \theta_1 \xi_p + \theta_0 \end{cases}$$

gdzie: $\theta_0 = \theta_0 [1, \dots, 1]^T$.

Poszukiwanie minimum prowadzi do spełnienia warunków:

$$(6) \quad \nabla_{\xi_p} \phi_{\psi\xi} = \frac{\partial \phi_{\psi\xi}}{\partial \Delta\xi} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \phi_{\psi\xi}}{\partial \theta_1} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial \phi_{\psi\xi}}{\partial \theta_0} = 0.$$

Pierwszy warunek rozwiązuje się analitycznie. Otrzyma się lokalne minimum odwrotnej efektywnej macierzy kowariancji:

$$(7) \quad U_{\text{eff}}^{-1} = U_{22} - (U_{12}^T + a U_{22}) V^{-1} (U_{12} + a U_{22})$$

$$\text{i} \quad \begin{bmatrix} U_\xi & U_{\xi\psi} \\ U_{\xi\psi}^T & U_\psi \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{12}^T & U_{22} \end{bmatrix},$$

$$\text{oraz} \quad V = U_{11} + \theta_1 (U_{12}^T + U_{12}) + \theta_1^2 U_{22}.$$

Funkcja kryterialną wyraża się zależnością quasi-kwadratową:

$$(8) \quad \phi_{\psi\xi}(\theta_1) = \theta_1^2 \left(S_{\xi\xi} - \frac{S_\xi^2}{S} \right) + 2 \left(\frac{S_{\xi\psi}}{S} - S_{\xi\psi} \right) \theta_1 + S_{\psi\psi} - \frac{S_\psi^2}{S}$$

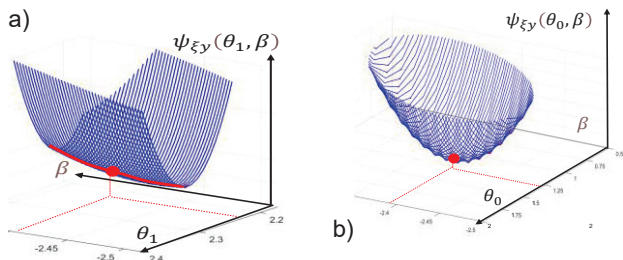
gdzie: $S = \mathbf{1}^T U_{\text{eff}}^{-1} \mathbf{1} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [u_{\text{eff}}^{-1}]_{ij} > 0$,

$$S_\xi = \xi^T U_{\text{eff}}^{-1} \mathbf{1} = \mathbf{1}^T U_{\text{eff}}^{-1} \xi, \quad S_{\xi\xi} = \xi^T U_{\text{eff}}^{-1} \xi,$$

$$S_\psi = \Psi^T U_{Yeff}^{-1} \mathbf{1} = \mathbf{1}^T U_{Yeff}^{-1} \Psi, \quad S_{\psi\psi} = \Psi^T U_{Yeff}^{-1} \Psi,$$

$$S_{\xi\psi} = \xi^T U_{Yeff}^{-1} \Psi = \Psi^T U_{Yeff}^{-1} \xi \quad \text{i} \quad \theta_0 = (S_\psi - \theta_1 S_\xi) / S.$$

Zależność funkcji kryterialnej $\phi_{\psi\xi}(\theta_1)$ wg (8) jest quasi-kwadratowa dla dowolnego β . Z równania (8) otrzymujemy zwykle te same dwuwymiarowe charakterystyki funkcji kryterialnej $\phi_{\psi\xi}(\theta_1, \beta)$ oraz $\phi_{\psi\xi}(\theta_0, \beta)$ - rysunek 1.



Rys. 1. Przykłady typowych charakterystyk funkcji kryterialnej $\phi_{\psi\xi}$ z minimum lokalnym – czerwona linia i minimum globalnym – czerwona kropka.: a) $\phi_{\psi\xi}(\theta_1, \beta)$ b) $\phi_{\psi\xi}(\theta_0, \beta)$.

Granicę pasma niepewności otrzymuje się po wyznaczeniu niepewności parametrów $u(\theta_1)$, $u(\theta_0)$, $\rho_{\theta_1, \theta_0}$ linii prostej i jej wariancji. Stąd:

$$(9) \quad u_y^2 = ((u^2(\theta_1)\xi^2(x, \beta) + 2\rho_{\theta_1, \theta_0}\xi(x, \beta)u(\theta_1)u(\theta_0) + u^2(\theta_0)) / (\psi'(y))^2$$

3. Przykłady dopasowania funkcji nieliniowych

Skuteczność metody ze zmianą zmiennych dla dopasowania różnych funkcji nieliniowych opisujących wyniki pomiarów zbadano na kilku przykładach. Wyznaczono numerycznie charakterystyki niepewności rozszerzonej oraz porównano parametry skorygowanych krzywych z krzywymi nominalnymi. Wszystkie wyniki przedstawiono w tabelach i na wykresach. Metodą analityczną z iteracją można sprawdzić jedynie parabolę opisującą dane pomiarowe, w których nie ma korelacji [12].

Przykład 1. Transformacja pojedynczej zmiennej x

Rozpatrzono dopasowanie do danych mierzonych punktów krzywej dwuwymiarowej o równaniu (1.1)¹

$$(1.1) \quad y = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} [\exp(-\alpha_2 x) - \exp(-\alpha_1 x)] + \alpha_3$$

Parametry nominalne: $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0,1$ i $\alpha_3 = 0$.

Współrzędne punktów pomiarowych podano w tabeli 1.

Tabela 1. Współrzędne punktów pomiarowych dla krzywej nieliniowej określonej wzorem (1.1)

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	0,64	0,72	0,70	0,74	0,71	0,66	0,48	0,52	0,42	0,43

Pomiary współrzędnych x i y wykonano z niepewnością względną $\delta \leq 2\%$. Zastosowano następujące podstawienia:

$$(1.2) \quad \xi(x, \alpha_1, \alpha_2) = \exp(-\alpha_2 x) - \exp(-\alpha_1 x)$$

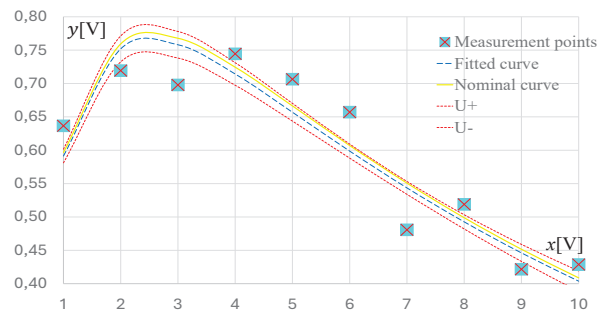
$$(1.3) \quad y = \theta_1 \xi(x, \alpha_1, \alpha_2) + \theta_0$$

Prosta (1.3) we współrzędnych y , ξ ma następujące parametry:

$$\theta_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2}, \quad \beta = \alpha_2, \quad \alpha_1 = \beta\theta_1 / (\theta_1 - 1) \quad \text{i} \quad \theta_0 = \alpha_3.$$

¹ Przykłady mają własną numerację wzorów poprzedzoną ich nr na początku.

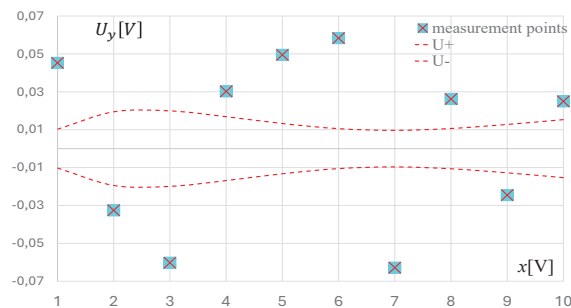
Rysunek 1.1 ilustruje dopasowanie funkcji nieliniowej (1.2) do punktów pomiarowych z tabeli 1 i jej pasmo niepewności.



Rys. 1.1. Punkty pomiarowe x , krzywa nominalna i krzywa dopasowana o parametrach: $\theta_{1min} = 1,1$, $\theta_{0min} = -0,023$, $\alpha_1 = \beta_{min} = 1,04$,

$\alpha_2 = \beta_{min}(1 - 1/\theta_{1min}) = 0,095$ na poziomie wartości funkcji kryterialnej $\phi_{\psi\xi min} \approx 129,59$ oraz przedział niepewności pomiarów skorelowanych dla macierzy kowariancji U_X i U_Y ze współczynnikami korelacji 0,2 dla zmiennych x i y oraz dla korelacji wzajemnych -0,2 (macierz kowariancji U_{XY} ze współczynnikami korelacji -0,2).

Rysunek 1.2 pokazuje szerokość pasma niepewności funkcji dopasowanej (1.2) i odległości punktów pomiarowych do niej.



Rys. 1.2. Punkty pomiarowe i przedział niepewności pomiarów skorelowanych dla macierzy kowariancji U_X i U_Y o współczynniku korelacji 0,2 dla zmiennych x i y oraz współczynnik korelacji -0,2 dla korelacji wzajemnych (macierz U_{XY}).

Przykład 2. Transformacja obu zmiennych x i y

Dopasowanie krzywej nieliniowej o równaniu:

$$(2.1) \quad y = \frac{x}{Ax+B}$$

Nominalne parametry krzywej to $A = 0,01$ i $B = 0,1$.

Do linearyzacji zastosowano podstawienia $\xi = 1/x$, $\psi(y) = 1/y$

$u(\xi) = u(x)/x^2$, $u(\psi) = u(y)/y^2$ i otrzymano równanie:

$$(2.2) \quad \xi(x) = AX + B$$

czyli $\theta_0 = A$, $\theta_1 = B$ bez parametryzacji, tj. dla $\beta = 1$

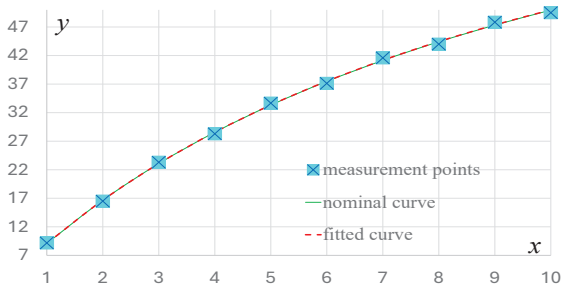
Przykład liczbowy: zmierzone współrzędne podano w tab. 2

Tabela 2.1. Współrzędne punktów pomiarowych dla krzywej (2.1)

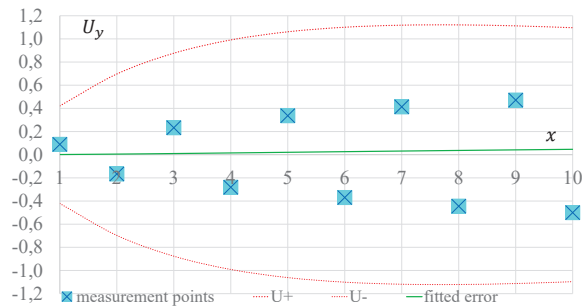
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	9,18	16,50	23,31	28,29	33,67	37,13	41,59	44,00	47,84	49,50

Niepewności względne δ pomiarów x i y nie przekraczają 2%.

Rysunek 2.1 przedstawia funkcję (2.1) dopasowaną do punktów pomiarowych i ich położenie, a rysunek 2.2 w powiększeniu granice pasma (korytarza) niepewności i odległości punktów pomiarowych od dopasowanej funkcji.



Rys. 2.1. Punkty pomiarowe, pokrywane się krzywe: nominalna i dopasowana $y = \frac{x}{0,01x+0,1}$ dla $\phi_{\psi\xi\min} \approx 27,57$.



Rys. 2.2. Punkty pomiarowe, błąd dopasowania poniżej 0,1 linia ciągła i pasmo niepewności dla pomiarów nieskorelowanych z tabeli 2li

Przykład 3. Uwikłana postać funkcji pomiarowej $H(x, y) = 0$

Zwykle dopasowanie funkcji polega na znalezieniu jednego lub większej liczby parametrów dobranych tak, aby zminimalizować funkcję kryterialną. Rozpatrzmy to dla przypadku zmiennych nieskorelowanych.

$$(3.1) \quad \phi_{xy}(\Delta X, \Delta Y) = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta x_i^2}{u^2(x_i)} + \frac{\Delta y_i^2}{u^2(y_i)} \rightarrow \min$$

Ograniczymy się do tych funkcji kryterialnych w postaci

$$(3.2) \quad H(x, y) = g(x, y, \beta) - \theta_1 \xi(x, \beta) - \theta_0$$

gdzie: funkcja jawna o postaci $z = g(x, y, \beta)$ dwóch zmiennych x i y zależy od parametru β , a funkcja jawna $\xi(x, \beta)$ zależy od jednej tylko zmiennej – w tym przypadku x i parametru β .

Do minimalizacji funkcji kryterialnej zostaną użyte różne od zera parametry θ_1 , θ_0 i β . Z równania (3.2) wynika, że w nowych wirtualnych zmiennych pomiarowych z i ξ , funkcja uwikłana ma postać liniową:

$$(3.3) \quad z = \theta_1 \xi(x, \beta) + \theta_0$$

Nowe współrzędne pomiaru po transformacji definiowane są przez z_i i x_i . Ograniczając się do pierwszych wyrazów rozwinięcia obu funkcji $z = g(x, y, \beta)$ i $\xi(x, \beta)$ w szereg Taylora, błędy i niepewności pomiarów przekształca się następująco

$$(3.4a,b,c,d) \quad \Delta z = z'_x \Delta x + z'_y \Delta y, \quad \Delta \xi = \xi' \Delta x, \\ u^2(\Delta z) = (z'_x)^2 u^2(\Delta x) + (z'_y)^2 u^2(\Delta y), \\ u^2(\Delta \xi) = (\xi')^2 u^2(\Delta x)$$

Jeśli dodatkowo założymy, że $\Delta z \approx z'_y \Delta y$ i $u_z^2 = u^2(\Delta z) \approx (z'_y)^2 u^2(\Delta y)$, tj. dominujący wpływ na błędy i zmienną niepewność $z = g(x, y)$ dotyczy przede wszystkim zmiennej y i jest opisany następującym warunkiem:

$$(3.5) \quad \phi_{\xi z}(\Delta \xi, \Delta Z) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\Delta \xi_i^2}{u^2(\xi_i)} + \frac{\Delta z_i^2}{u^2(z_i)} \right) \rightarrow \min$$

Jest to równoważne z (3.1) i oznacza że $\phi_{\xi z} \rightarrow \phi_{xy}$. Zatem dla układu zawierającego (3.3) i (3.5) zastosowano dobrze znane i wcześniej podane rozwiązanie. W przypadku braku dominacji zmiennej y w funkcji $z = g(x, y)$, warunek (3.2) wymaga dopasowania funkcji implikowanej w inny sposób. Jednakże w przypadku małych błędów oba te dopasowania (3.1) i (3.5) zbiegną się do krzywej nominalnej. Używając twierdzenia o pochodnej funkcji uwikłanej

$$(3.6) \quad y' = dy/dx = -\frac{\partial H}{\partial x} / \frac{\partial H}{\partial u} \approx \frac{u(y)}{u(x)}$$

wyznacza się wzory na przybliżone wartości niepewności standardowych i rozszerzonych zmiennych x i y :

- niepewności standardowe

$$(3.7a,b) \quad u(x) = u_z / \sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y y')^2},$$

$$u(y) = u_z |y'| / \sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y y')^2},$$

- niepewności rozszerzone:

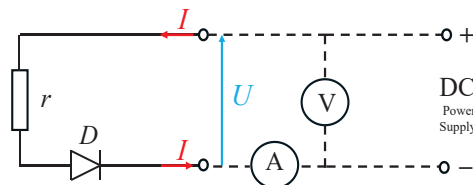
$$(3.8a,b) \quad U(x) = t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-2} u_z / \sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y y')^2},$$

$$U(y) = t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-2} u_z |y'| / \sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y y')^2}.$$

4. Przykłady zastosowań metody w pomiarach

Przykład 4. Pomiary układu diody D i rezystancji r

Dla weryfikacji omawianej metody dopasowywania krzywej nieliniowej do punktów pomiarowych rozpatrzono obwód diody półprzewodnikowej o charakterystyce U_d połączonej szeregowo z rezystancją r . Układ jest zasilany ze źródła stałego napięcia U . Schemat układu podano na rysunku 4.1.



Rys. 4.1 Układ pomiarowy do ilustracji dopasowywania nieliniowej charakterystyki $U(I)$ do punktów pomiarowych.

W tym układzie mierzy się prąd I amperomierzem i napięcie U woltomierzem z jednakowymi niepewnościami względnymi $\delta(U) = 0,5\%$. Samą diodę opisuje wykładnicza zależność prądu od napięcia – równanie Shockleya:

$$(4.1) \quad I = I_0 \left(\exp\left(\frac{U_d}{\varepsilon}\right) - 1 \right)$$

gdzie I_0 – prąd nasycenia złącza, ε – stała charakteryzująca diodę i jej temperaturę, $U_d = \varepsilon \ln\left(\frac{I}{I_0} + 1\right)$ – napięcie jej złącza.

Z drugiego prawa Kirchhoffa wynika związek mierzonego napięcia U na wejściu obwodu oraz jego prądu I :

$$(4.2) \quad Ir + \varepsilon \ln\left(\frac{I}{I_0} + 1\right) = U$$

Równanie (4.2) jest funkcją uwikłaną

$$(4.3) \quad H(I, U) = Ir + \varepsilon \ln\left(\frac{I}{I_0} + 1\right) - U = 0$$

Nie jest podana analityczna zależność prądu I od napięcia U .

Zmierzono napięcia i prądy w dziesięciu punktach $n=10$ układu z rysunku 4.1 i podano je w tabeli 4.1. Nominalne parametry tego obwodu to: $\varepsilon = 26 \text{ mV}$, $r = 1,5 \text{ m}\Omega$, $I_0 = 10 \text{ }\mu\text{A}$.

Tabela 4.1. Współrzędne badanych punktów krzywej nieliniowej otrzymane z pomiarów w układzie z rysunku 4.1.

I [mA]	1,10	1,37	3,29	6,80	21,98	69,09	148,75	317,59	970,12	1975,35
U [mV]	120	130	150	170	200	230	250	270	300	320

Z pomiarów prądu i napięcia można wyznaczyć rezystancję r , parametr ε i prąd nasycenia I_0 , dostosowując nieliniową charakterystykę opisaną wzorem (4.2) za pomocą kryterium ważonych najmniejszych kwadratów WTLS przy założeniu o niewystępowaniu korelacji między mierzonymi wielkościami. Zastosuje się podstawienia, które umożliwią dopasowanie obu mierzonych wielkości do linii prostej:

$$(4.4a,b) \quad z = g(I, U) = \frac{U}{I} \quad \text{oraz} \quad z = \theta_1 \xi + \theta_0$$

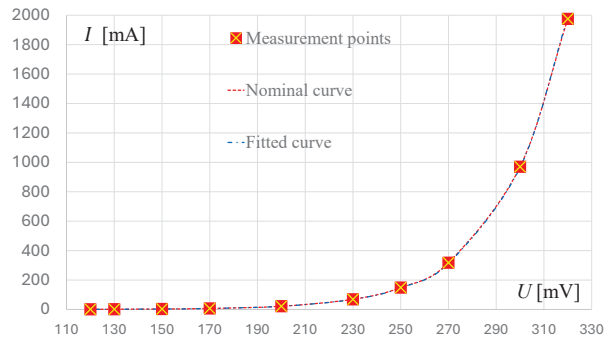
$$\text{gdzie: } \theta_1 = \varepsilon, \quad \theta_0 = r \quad \text{i} \quad \beta = I_0, \quad \text{zaś} \quad \xi(I) = \frac{1}{I} \ln\left(\frac{I}{\beta} + 1\right)$$

Zmierzone wartości przekształcane są w nowe współrzędne w układzie $z = U/I$ i $\xi = \ln(I/\beta + 1)/I$. Niepewność nowej współrzędnej $\xi(I)$ możemy oszacować z prawa propagacji niepewności, korzystając z jej pierwszej pochodnej $\xi'(I)$. Niepewność zmiennej z też wynika z prawa propagacji i wynosi:

$$(4.5) \quad u(z_i) = \frac{u_i}{z_i} \sqrt{(\delta(U_i))^2 + (\delta(I_i))^2}$$

Wektory $\xi = [\xi_1, \dots, \xi_n]^T$ i $z = [z_1, \dots, z_n]^T$ zawierają współrzędne punktów pomiarowych po transformacji. Przy nieskorelowaniu podaje się diagonalną macierz odwrotną [12]:

$$(4.6) \quad [U_{\text{Yeff}}^{-1}]_{ii} = (\theta_1^2 u^2(\xi_i) + u^2(z_i))^{-1}$$



Rys. 4.2. Punkty pomiarowe, nominalna krzywa nieliniowa i krzywa dopasowana z parametrami: $\varepsilon = 26,05 \text{ mV}$, $r = 1,5 \text{ m}\Omega$, $I_0 = 10,2 \text{ }\mu\text{A}$ na poziomie kryterium $\phi_{xzmin} \approx 23,46$.

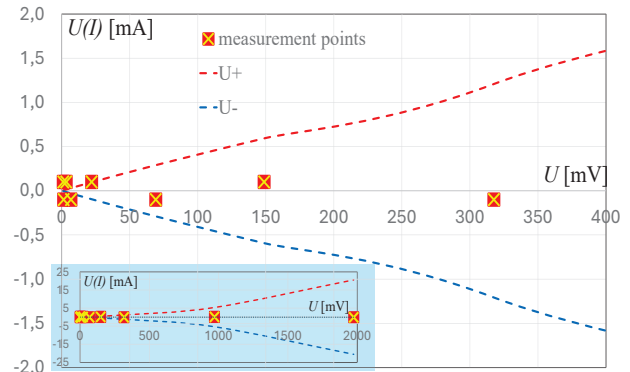
Dopasowanie polega na przyjęciu szeregu wartości parametru θ_1 na przykład z krokiem Δ , tj. $\theta_{1j} = \theta_{10} + (j - 1)\Delta$ i $j = 1, \dots, 10$, Wartość początkową θ_{10} przyjęto tak, że wyznaczone wartości funkcji kryterialnej $\phi_{\xi z}(\theta_{1j})$ mają minimum lokalne. Parametr β równy I_0 też należy przyjąć z góry. Następnie, zmienia się zakres od β_{min} do β_{max} i utrzymując minimum lokalne $\phi_{\xi z local min}(\theta_{1j})$, minimalizuje się funkcję kryterialną tak, aby otrzymać minimum globalne $\phi_{\xi z global min}(\theta_{1j})$. W trakcie tego procesu można zmieniać zarówno wartość θ_{10} jak i krok Δ , tak aby na wykresie $\phi_{\xi z}(\theta_1)$ pojawiło się minimum lokalne. Dla minimalizacji

zależność $\theta_0 = (S_z - \theta_1 S_\xi)/S$ określa rezystancję r . Dla minimum globalnego wyznaczono parametry diody jako:

$$\theta_{1globamin} = \varepsilon = 26,05 \text{ mV}, \quad \theta_{0globamin} = r = 1,50 \text{ m}\Omega,$$

$$\beta = I_0 = 10,2 \text{ }\mu\text{A}, \quad \text{dla } \phi_{xzmin} = 23,46.$$

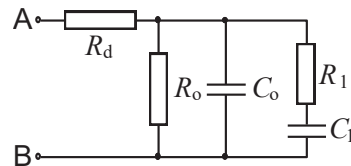
Na rysunkach 4.2 i 4.3 przedstawiono punkty pomiarowe, krzywą dopasowaną pokrywającą się z nominalną oraz granice korytarza niepewności



Rys. 4.3. Punkty pomiarowe i pasmo niepewności pomiarów nieskorelowanych z danych podanych w tabeli

Przykład 5. Wyznaczanie parametrów modelu kondensatora z pomiarów składowych jego impedancji

W modelowaniu i opisach częstotliwościowych zmian składowych impedancji kondensatorów jako dwójników, przyjmuje się wieloelementowe schematy zastępcze. Dla prądu przemiennego o częstotliwościach w zakresie 10 Hz do 100 KHz, zastosowano w badaniach metodą Monte Carlo [3, P12], schemat zastępczy podany na rysunku 5.1. Zawiera on trzy rezystory i dwa kondensatory o stałych wartościach.



Rys.5.1 Schemat zastępczy kondensatora

Impedancja Z dwójnika AB z rysunku 5.1 zależy od częstotliwości. Ogólnie opisuje ją wzór w liczbach zespolonych

$$(5.1) \quad Z = R + jX$$

Składowe impedancji Z , rezystancyjną R i reaktancyjną $X = -1/\omega C$, mierzy się bezpośrednio dla określonej częstotliwości prądu przemiennego lub wyznacza z pomiarów napięcia U_{AB} , prądu I_{AB} i ich różnicy faz.

Rozpatrzymy dopasowanie parametrów modelu kondensatora metodą najmniejszych kwadratów do nieskorelowanych wyników pomiarów składowych w pięciu częstotliwościach podanych w tabeli 5.1 [3, P12].

Tabela 5.1.

Lp	f_i [Hz]	R_i [Ω]	C_i [F]
1	1×10^1	$5,083 \times 10^5$	$8,476 \times 10^{-9}$
2	1×10^2	$6,561 \times 10^4$	$6,006 \times 10^{-9}$
3	1×10^3	$1,107 \times 10^3$	$5,015 \times 10^{-9}$
4	1×10^4	$1,134 \times 10^1$	$5,000 \times 10^{-9}$
5	1×10^5	$3,115 \times 10^{-1}$	$5,000 \times 10^{-9}$

Zastępcza admitancja Z^{-1} układu uwzględnia rezystancję R_d szeregową do połączonych równolegle R_0 , C_0 i C_1 w szereg z rezystancją R_1 , tj. z $R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} = \frac{1+j\omega R_1 C_1}{j\omega C_1}$

$$(5.2) \quad \mathbf{Z}^{-1} = \frac{1}{R-R_d+jX} = \frac{1}{R_0} + j\omega C_0 + \frac{j\omega C_1}{1+j\omega R_1 C_1}$$

Po przekształceniach wyrażen w liczbach zespolonych, tj. pomnożeniu ich mianowników i liczników przez wyrażenia sprzężone do mianowników. Otrzymuje się:

$$(5.3) \quad \frac{R-R_d}{(R-R_d)^2+X^2} - j \frac{X}{(R-R_d)^2+X^2} = \frac{1}{R_0} + \frac{\omega^2 C_1^2 R_1}{1+\omega^2 R_1^2 C_1^2} + j\omega \left(C_0 + \frac{C_1}{1+\omega^2 R_1^2 C_1^2} \right)$$

Z równości składowych rzeczywistej i urojonej obu stron wyrażenia (5.3) otrzymuje się dwa równania:

$$(5.4a, b) \quad \frac{R-R_d}{(R-R_d)^2+X^2} = \frac{1}{R_0} + C_1 \frac{\omega^2 C_1 R_1}{1+\omega^2 R_1^2 C_1^2}$$

$$- \frac{X}{\omega(R-R_d)^2+X^2} = C_0 + C_1 \frac{1}{1+\omega^2 R_1^2 C_1^2}$$

Równania (5.4a,b) stają się zależnościami liniowymi dla nowych zmiennych ψ, ξ z parametrami $\beta_1 = R_1$ i $\beta_2 = R_d$, tj.:

$$(5.5a, b) \quad \psi_1(\beta_2) = \frac{1}{R_0} + C_1 \xi_1(\beta_1), \quad \psi_2(\beta_2) = C_0 + C_1 \xi_2(\beta_1)$$

Odcięte i rzędne nowych zmiennych są następujące:

$$(5.6a, b) \quad \xi_{1i} = \frac{\omega_i^2 C_1 \beta_1}{1+\omega_i^2 \beta_1^2 C_1^2} \quad \text{i} \quad \xi_{2i} = \frac{1}{1+\omega_i^2 \beta_1^2 C_1^2},$$

$$(5.7a, b) \quad \psi_{1i} = \frac{R_i - \beta_2}{(R_i - \beta_2)^2 + X_i^2} \quad \text{i} \quad \psi_{2i} = \frac{-X_i / \omega_i}{(R_i - \beta_2)^2 + X_i^2}.$$

Z prawa propagacji błędów wynikają niepewności:

$$(5.8a, b, c) \quad u(\xi_{1i}) = \frac{2C_1\beta_1\omega_i}{(1+\omega_i^2\beta_1^2C_1^2)^2}u(\omega_i),$$

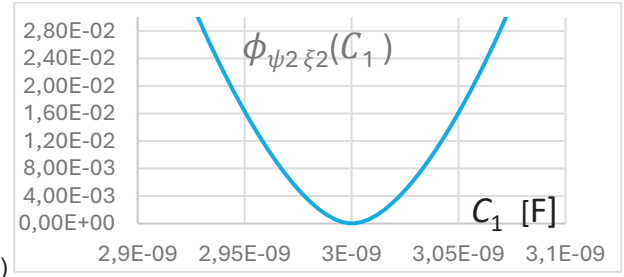
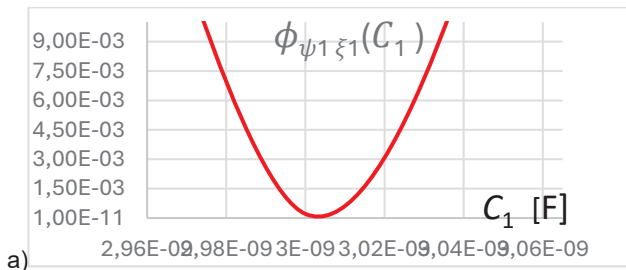
$$u(\xi_{2i}) = \frac{2C_1^2\beta_1^2\omega_i}{(1+\omega_i^2\beta_1^2C_1^2)^2}u(\omega_i) = C_1\beta_1u(\xi_{1i}), u(\psi_{1i}) =$$

$$= \frac{1}{[(R_i - \beta_2)^2 + X_i^2]^2} \sqrt{[X_i^2 - (R_i - \beta_2)^2]u^2(R_i) + 4X_i^2(R_i - \beta_2)^2u^2(X_i)}$$

$$u(\psi_{2i})$$

$$= \sqrt{\frac{X_i^2[(R_i - \beta_2)^2 + X_i^2]^2u^2(\omega_i) + 4(R_i - \beta_2)^2X_i^2u^2(R_i) + ((R_i - \beta_2)^2 - X_i^2)^2u^2(X_i)}{\omega_i[(R_i - \beta_2)^2 + X_i^2]^2}}$$

Przy założeniu, że pomiary obu składowych mają niepewności $\leq 2\%$, a niepewność pomiaru częstotliwości $u(f) \leq 0,58$ Hz, otrzymano funkcje kryterialne $\phi_{\psi_1\xi_1}(C_1), \phi_{\psi_2\xi_2}(C_2)$ podane na rys 5.2. Wyznaczono je według wzoru (8), na podstawie macierzy odwrotnych do efektywnych macierzy kowariancji dla nieskorelowanych wielkości wejściowych (ξ_{1i} i $z_i = \psi_{1i}$ oraz ξ_{2i} i $z_i = \psi_{2i}$), tj. podobnie jak wzór (4.2).



b) Rys. 5.2. Wykresy funkcji kryterialnej dla równań (5a) i (5b).

Minimum globalne występuje dla $\beta_1 = R_1 = 1$ M Ω oraz dla $\beta_2 = R_d = 0,2$ Ω . Dopasowane wartości parametrów to: $C_1 = 3,0$ nF, $C_0 = 5,2$ nF, $R_0 = 9,999$ M Ω .

Niepewności elementów R_1, C_1, R_0, C_0, R_d opisane są wzorami o identycznej strukturze, tj.:

$$(5.9) \quad u^2(T) = \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{\partial T}{\partial R_i} \right)^2 u^2(R_i) + \left(\frac{\partial T}{\partial X_i} \right)^2 u^2(X_i) + \left(\frac{\partial T}{\partial f_i} \right)^2 u^2(f_i) \right]$$

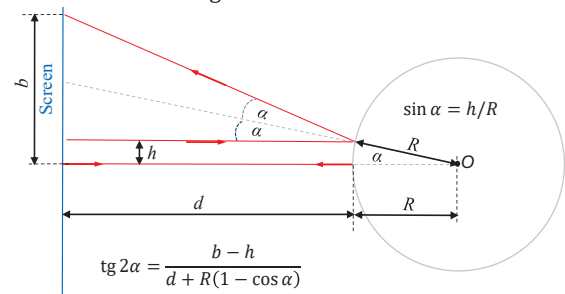
gdzie symbol T to wybrany element: R_1, C_1, R_0, C_0, R_d układu.

Wyznaczono numerycznie współczynniki czułości estymujące pierwsze pochodne cząstkowe i niepewności standardowe elementów układu. Otrzymano następujące ich wartości i niepewności bezwzględne i względne: $R_d = 0,2(0,004)$ Ω (2%), $C_1 = 3(0,2)$ nF(6,4%), $R_1 = 1(0,02)$ M Ω (2%), $R_0 = 9,999(0,57)$ M Ω (5,7%), $C_0 = 5,2(0,026)$ nF(0,54 %).

Przykład 6. Pomiar promienia krzywizny soczewek

Rysunek 6.1 przedstawia schemat laserowego pomiaru promienia R krzywizny soczewki sferycznej. Soczewka umieszczona jest centralnie w odległości d od ekranu (Screen). Niepewność $u(d) \approx 0$. Na soczewkę pada wiązka laserowa w odległości h (niepewność $u(h) = 0,001$ mm) od jej osi optycznej. Po odbiciu wiązki od powierzchni soczewki, tworzy ona na ekranie punkty świetlne w odległości b od jej osi. Wykonuje się serię pomiarów odległości b z niepewnością $u(b) = 0,1$ mm i z nich wyznacza się promień R . Dla α jako kąta padania i odbicia wiązki otrzymuje się podstawową zależność geometryczną

$$(6.1) \quad \frac{b-h}{\operatorname{tg} 2\alpha} = d + R(1 - \cos \alpha)$$



Rys. 6.1. Schemat pomiaru promienia R soczewek sferycznych.

W opisie pomiaru wykorzystana się zależności trygonometryczne

$$(6.2) \quad \operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}{1 - 2\sin^2\alpha}$$

oraz $\frac{h}{R} = \sin \alpha$ i $dh/d\alpha = R \cos \alpha$.

Z (6.1) otrzymuje się

$$(6.3) \quad \frac{b}{\operatorname{tg}2\alpha} = d + R\left(1 - \frac{1}{2\cos\alpha}\right)$$

Po wprowadzeniu nowych zmiennych

$$(6.4) \quad z = \frac{b}{\operatorname{tg}2\alpha} = b \frac{1 - 2\sin^2\alpha}{2\sin\alpha\sqrt{1 - \sin^2\alpha}} = b \frac{1 - \frac{2h^2}{R^2}}{\frac{2h}{R}\sqrt{1 - \frac{h^2}{R^2}}}$$

$$(6.5) \quad \xi = 1 - \frac{1}{2\cos\alpha} = 1 - \frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{h^2}{R^2}}}$$

zależność (6.3) staje się liniowa:

$$(6.6) \quad z = R\xi + d$$

Niepewności obu nowych zmiennych $u(\xi)$ i $u(z)$ wynoszą:

$$(6.5a, b) \quad u(\xi) = \frac{1}{2} \frac{\frac{h}{R^2}}{\left(1 - \frac{h^2}{R^2}\right)^{\frac{3}{2}}} u(h),$$

$$u(z) \approx \frac{1 - \frac{2h^2}{R^2}}{\frac{2h}{R}\sqrt{1 - \frac{h^2}{R^2}}} u(b)$$

Z obliczeń wynika, że w niepewności $u(z)$ dominuje niepewność $u(b)$, tj.: $u(z) \sim u(b)$. Można więc założyć, że nie ma korelacji pomiędzy ξ i z . Niepewność $u(\xi)$ zależy od $u(h)$, zaś $u(z)$ nie zależy praktycznie od $u(h)$. Wyniki pomiarów w układzie z rysunku 6.1 podano w tabeli 6.1.

Tabela 6.1. Położenia na ekranie śladów b wiązki świetlnej odbitej od soczewki i padającej na nią w odległości h od jej osi, $d=100$ mm.

h [mm]	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
b [mm]	20,2	25,3	30,6	35,9	41,4	47,0	52,9	58,9	65,1	71,6

Po zastosowaniu metody WTLS bez korelacji wyników, dla funkcji kryterialnej $\phi_{\xi z}(\Delta\xi, \Delta Z)$ oraz po transformacjach: $h \rightarrow \xi$ i $b \rightarrow z$, funkcja kryterialna ma nieco inne wartości, ale dla małych wartości błędów otrzymuje się $\phi_{\xi z}(\Delta\xi, \Delta Z) \rightarrow \phi_{h,b}(\Delta h, \Delta b)$. Przy tej zbieżności wartość d nie występuje w obliczeniach. Wystarczy więc, że d będzie stałe w całym procesie pomiarów. Dla odległości ekranu od soczewki d

=100 mm otrzymano promień krzywizny: $R = 50,2$ (0,17) mm i funkcję kryterialną $\phi_{\xi z \min} \approx 4$.

Wnioski

W artykule przedstawiono metodę dopasowywania funkcji nieliniowych do danych mierzonych punktów. Stosuje się w niej zmianę zmiennych aby uzyskać zależności liniowe dopasowywane według totalnego kryterium ważonych najmniejszych kwadratów WTLS. Uwzględnia się zarówno niepewności współrzędnych wyników pomiaru, jak i ich wzajemne korelacje, jeśli występują one w pomiarach.

Omawiana tu metoda polega na zastąpieniu nieliniowej zależności pomiędzy współrzędnymi zależnością liniową w nowych współrzędnych, aby po takiej zmianie zmiennych można było zastosować regresję liniową linii prostej.

W metodzie tej jako dopuszczalne przyjmuje się przybliżenie dla propagacji błędów i niepewności przez pierwszą pochodną funkcji transformacji. Jeżeli badane punkty nie leżą zbyt daleko od poszukiwanej funkcji nieliniowej i niepewności pomiaru ich współrzędnych nie są zbyt duże, np. poniżej 5%, to metodę tę można stosować z powodzeniem. Ograniczenia są tego samego rzędu, jak dla szacowania dokładności pomiarów według GUM.

Metoda umożliwia też wyznaczenie pasma (korytarza) niepewności dopasowanej funkcji nieliniowej.

W literaturze [2] są tylko proste przykłady linearyzacji funkcji opisującej pomiary. Nie natrafiono na gruntowne omówienie dopasowania funkcji nieliniowych z linearyzacją przez zmianę zmiennych i brakowało też omówienia wyznaczania ich pasma niepewności przy występowaniu różnych korelacji i bez nich.

W tej pracy rozpatrzono sześć przykładów obliczeniowych dopasowania różnych funkcji nieliniowych do danych punktów pomiarowych, w tym funkcję uwikłaną. Metodę dopasowania funkcji nieliniowej do pomiarowych danych ze zmianą jednej lub obu zmiennych autorzy stosowali też w pracach [8-12], [P8-P11] dla innych przykładów pomiarów.

Z naszych prac wynika, że metoda ze zmianą zmiennych jest uniwersalna, jeśli właściwie dobrać się nowe zmienne.

Omawianą tu metodę z linearyzacją funkcji nieliniowej przez zmianę zmiennych można z powodzeniem stosować w praktyce pomiarowej i wykorzystać przy opracowywaniu nowej wersji przewodnika GUM.

Dodatek. Literatura autorów o regresji i niepewnościach pomiarów opisanych funkcjami liniowymi i nieliniowymi po polsku

- P1. Warszawa, Z.L., Puchalski, J.: Estymacja niepewności pośrednich pomiarów dwuparametrowych na wyjściu czwórnik. 52, Monografia: red. J. Roj. Metrologia Naukowa, Normatywna i Przemysłowa ... Wyd. Politechnika Śląska Gliwice 2020, 11-26
- P2/3. Warszawa Z., Puchalski J.: Niepewności pomiarów w metodzie regresji liniowej. Część 1. Prosta i jej pasma niepewności dla nieskorelowanych danych pomiarowych *PAR*, R. 24, n. 3/2020, 79-91, DOI:10.14313/PAR_237/79; Część 2. Niepewności prostej regresji dla zmiennej Y o skorelowanych danych. *PAR*, R. 24, Nr 4/2020, 61-72, DOI: 10.14313/PAR_238/61
- P4. Warszawa Z.L., Puchalski J.: Ocena dokładności pomiarów metodą regresji liniowej z uwzględnieniem zasad przewodnika GUM. *Metrologia Teoria i Praktyka Materiały 53MKM Warszawa GUM. Studia i Monografie Zeszyt 556 Politechnika Opolska 2021s.59 -104*
- P5. Puchalski J., Warszawa Z.L.: Regresja i niepewność linii prostej dla pomiarów obu zmiennych x i y ze wszystkimi korelacjami. *PAR* R.26. Nr 2/2022 s.47-58, DOI:10.14313/PAR_244/47
- P6. Puchalski J., Warszawa Z.L.: Wyznaczanie linii prostej metodą regresji liniowej i jej pasma niepewności wg GUM z pomiarów obu zmiennych x i y przy ich autokorelacji i korelacji wzajemnej. *METROLOGIA badania i zastosowania. Monografia M152 (54 MKM) Politechnika Świętokrzyska Kielce s.235-256*
- P7. Volodarskiy Ye., Warszawa Z.L., Lushchik D.: Niepewność parametrów szacowanych pośrednio z innych wielkości skorelowanych w procesie pomiarów. *Metrologia badania i zastosowania. Monografia M152 pod red. Jerzego Augustyna Politechnika Świętokrzyska Kielce str. 268-278 (Materiały 54 MKM)*
- P8. Puchalski J., Warszawa Z.L.: Metoda przybliżonego dopasowania funkcji nieliniowej do danych pomiarowych i jej pasmo niepewności. *M onografia (55 MKM): Metrologia red. M.R Rząsy Politechnika Opolska, Opole 2023, 9-27*
- P9. Pieniążek J.: Analiza dokładności uwikłanego pomiaru pośredniego *Monografia: (55 MKM) Metrologia pod red. M. Rząsy Politechnika Opolska, Opole 2023, 41-50*
- P10. Puchalski J., Warszawa Z. L.: Estymacja niepewności wybranych funkcji nieliniowych wyznaczanych z pomiarów metodą regresji liniowej *PAR 3_2023.45 – 55*
- P11. Warszawa Z.L., Puchalski J., Więcek T.: Metoda dopasowania funkcji nieliniowej do danych pomiarowych i jej pasmo niepewności. *Materiały XV konferencji SP2024 Systemy pomiarowe w badaniach naukowych i w przemyśle. Uniwersytet Zielonogórski 151-154*
- P12. Kubisa S., Warszawa Z.L.: Dokładność identyfikacji parametrów modelu kondensatora dwoma metodami Monte Carlo. *PAR. 2 2018 141-48 DOI: 10.14313/PAR_228*

Autorzy:

Zygmunt Lech Warszawa, (doc. dr inż. emerytowany) Polskie Towarzystwo Metrologiczne, e-mail: zlw1936@gmail.com
Jacek Puchalski, dr inż. główny metrolog, Główny Urząd Miar, Dep. Współpracy Międzynarodowej, e-mail: jacek.puchalski@gum.gov.pl;
Tomasz Więcek, prof. dr hab. inż. Zakład Optyki Stosowanej, Politechnika Rzeszowska. e-mail: ftkwiece@prz.edu.pl

LITERATURA

1. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, BIPM, 2008 + Supplements.
2. Madsen K., Nielsen H.B., Tingleff O., Methods for non-linear least square problems. 2nd ed. 04. 2004. Denmark Technical University.
3. Kubisa S., Warsza Z. L. : Identification of parameters of the capacitor equivalent scheme using Monte Carlo methods. In: R. Szewczyk et al (ed.) Automation 2017 Innovations in Automation, Robotics and Measurement Techniques, series AISC 550. Springer Int. Publishing AG 2017. 66-68. DOI10.1007/978-3-319-54042-9-15
4. Warsza, Z. L., Puchalski, J.: Uncertainty Bands of the Regression Line for Data with Type A and Type B Uncertainties of Dependent Variable Y. in: R. Szewczyk et al. (Eds.) Automation 2021, AISC series, vol. 1390, 342–363, Springer Nature Switzerland AG doi.org/10.1007/978-3-030-74893-7_32
5. Warsza, Z. L., Puchalski, J., Uncertainty bands of the regression line for autocorrelated data of dependent variable Y. Proc. of 22nd Conference on Automation 2021 Springer Nature Switzerland AG. ASIC series v.1390.364-386. doi.org/10.1007/978-3-030-74893-7_33
6. Warsza, Z. L., Puchalski, J.: Estimation the uncertainty bands of the regression line for the correlated data of variable Y by the GUM guide convention. Part 1 and Part 2. *Ukrainian Metrological Journal* no 1–2/2022.12-23 (Presented online on 8th Int. seminar “Uncertainty of measurement UM-2021” 13-14 Dec. 2021 in Kharkov)
7. Puchalski, J., A new algorithm for generalization of least square method for straight line regression in Cartesian system for fully correlated both coordinates. *Int J Auto A.I Mach Learn* 2021 20-54
8. Puchalski J., Warsza Z. L.: Linear Regression method of matching the parabolic curve to tested points of both correlated coordinates. Abstract (2 pages). *Math Met* 2022 Paris.
9. Puchalski J., Warsza Z.L.: Metoda dopasowania funkcji nieliniowej do danych punktów pomiarowych i jej pasmo niepewności. *PAR*. 3_2023. 45–55, DOI:10.14313/PAR 249/45
10. Warsza Z. L., Puchalski J.: Assessment of the uncertainty of selected nonlinear functions determined from measurements by the linear regression method. (abstract and presentation Monography of World online seminar AMCTM XIII Sept. 2023 Sarajevo). *Advanced Mathematical and Computational Tools in Metrology and Testing XIII*. Pavese F., Forbes A.B. and all. (eds.): Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences. vol 94 © 2025 World Scientific Publishing Co. N. Jersey · London · Singapore · pp. 288-307
https://doi.org/10.1142/9789819800674_0027
11. Warsza Z. L., Puchalski J.: Method of fitting a nonlinear function to measurement data, its uncertainty, and its application in thermistor circuits. *Automation 2024.*, LNNS, Springer Nature Switzerland AG 2024 (in print) doi
12. Puchalski, J., Nonlinear Curve Fitting to Measurement Points with WTLS Method Using Approximation of Linear Model. *Int. J. Auto A.I Mach Learn* 2024 vol.4 n.1 pp.36-60 ISSN-2563-7568