

## Pewne uwagi o symetrii czwórników pasywnych w stanach ustalonych i nieustalonych

**Streszczenie.** W pracy badano symetrię czwórników pasywnych pod kątem określenia współczynnika, który mówiłby o poziomie niesymetrii; tzn. aby na jego podstawie można było stwierdzić, który z dwóch czwórników niesymetrycznych jest „bliższy” symetrii. Wykorzystując fakt, że każdy czwórnik pasywny można przedstawić jako czwórnik typu „T” lub „II” rozpatrywano tylko te dwa typy czwórników. Określony współczynnik powinien również wskazywać parametry dodatkowego czwórnika symetryzującego – w postaci czwórnika jednoelementowego z szeregową impedancją lub równoległą admittancją, dołączonego kaskadowo do wyjściowego czwórnika niesymetrycznego tak, aby cały układ był czwórnikiem symetrycznym. Rozpatrzono stan ustalony przy zasilaniu napięciem stałym i sinusoidalnym oraz stan nieustalony przy wykorzystaniu metody operatorowej. Przedstawiono odpowiednie schematy układów symetryzujących i wnioski wypływające z powyższych badań.

**Abstract.** In this paper, the symmetry of passive two-ports was studied with a view to determining a coefficient that would tell about the level of asymmetry; that is, so that it could be determined from it which of two asymmetric two-ports is "closer" to symmetry. Taking advantage of the fact that any passive two-ports can be represented as a "T" or "II" two-ports, only these two types of two-ports were considered. The specified coefficient should also indicate the parameters of an additional symmetrical four-terminal-networks - in the form of a single-element crosses with series impedance or parallel admittance, cascaded to the output non-symmetrical four-terminal-networks so that the whole system is a symmetrical crosses. The steady-state condition under DC and sinusoidal voltage supply and the transient condition using the operator method were considered. The corresponding schematics of the symmetrical circuits and the conclusions drawn from the above studies are presented. (**Some remarks on the symmetry of passive two-ports in steady and transient states**).

**Słowa kluczowe:** czwórnik pasywny, czwórnik symetryczny.

**Keywords:** passive four-terminal-networks, symmetrical crosses.

### Wstęp

W niniejszej pracy przyjęto najczęściej używany w elektrotechnice zwrot prądów w kierunku przekazywanie energii; od wejścia do wyjścia [1,2,3,4] (rys.1.). Oznakowanie to ma tę zaletę, że na dołączonym obciążeniu na zaciskach wyjściowe zwroty prądu i napięcie na obciążeniu są przeciwne jak również połączenia łańcuchowe nie wymagają zmian w oznakowaniu prądów.



Rys.1. Schemat ogólny czwórnika, prądy zwrócone od wejścia do wyjścia.

Badając czwórniki pasywne można łatwo stwierdzić że są one odwracalne [1,3,5,6] tzn. spełniają zasadę wzajemności co pociąga za sobą warunek:

$$(1) \quad \det A = 1$$

gdzie: **A** jest macierzą łańcuchową czwórnika:

$$(2) \quad A = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Określając warunki odwracalności dla parametrów admittancejnych, impedancyjnych i hybrydowych [1,2,7] otrzymuje się następujące zależności:

$$(3) \quad y_{12} = y_{21}, \quad z_{12} = z_{21}, \quad h_{12} = -h_{21}, \quad g_{12} = -g_{21}$$

Inną ważną cechą czwórników pasywnych jest ich symetria [1,2,5,6]. Definicję symetrii można przedstawić następująco: czwórnik jest symetryczny, jeżeli po zmianie miejscami zacisków wejściowych z wyjściowymi prądy i napięcia zaciskowe nie ulegną zmianie. Ma to zasadnicze znaczenie np. w układach, gdzie przenoszenie sygnału odbywa się w dwóch kierunkach [8,9,10].

Analizując parametry czwórników łatwo dojść do wniosku, że czwórniki symetryczne muszą być odwracalne. I tak warunkiem symetrii czwórnika opisanego równaniem łańcuchowym jest [1,2,3]:

$$(4) \quad \det A = AD - BC = 1 \quad i \quad A = D$$

Dla pozostałych parametrów jest spełnienie warunków (3) i (5):

$$(5) \quad y_{11} = y_{22}, \quad z_{11} = z_{22} \\ h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} = 1, \quad hg_{11}g_{22} - g_{12}hg_{21} = 1$$

### Propozycje określenia współczynnika symetrii

Pierwsza propozycja określenia współczynnika symetrii nasuwająca się po lekturze poprzedniego punktu, to wniosek, że ten współczynnik powinien być określony jako stosunek parametrów łańcuchowych A i D.

$$(6) \quad W_{S1} = \frac{A}{D}$$

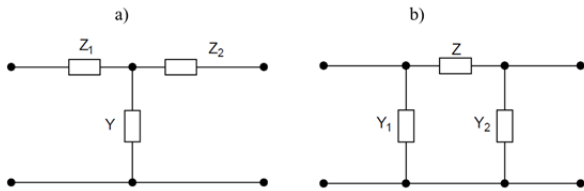
Dla innych równań opisujących czwórnik [7] - odpowiednio do wg (3) i (5)

$$(7) \quad W_{S1} = \frac{y_{11}}{y_{22}}, \quad W_{S1} = \frac{z_{11}}{z_{22}}, \quad W_{S1} = -\frac{h_{12}}{h_{21}}, \quad W_{S1} = -\frac{g_{12}}{g_{21}}.$$

Dla tak określonego współczynnika, jego wartość równa jedności oznacza czwórnik symetryczny. Im jego wartość jest większa, tym dany czwórnik jest „bardziej odległy” od symetrii.

Przy wymuszeniach stałych parametry są liczbami rzeczywistymi dodatnimi, przy wymuszeniach sinusoidalnych – są liczbami zespolonymi a w stanach nieustalonych – funkcjami argumentu s. Dwa ostatnie przypadki mogą powodować pewne trudności w określaniu tak zdefiniowanego współczynnika. Poza tym na podstawie tego współczynnika trudno wywnioskować jaki czwórnik dodatkowo należy przyłączyć, aby uzyskać czwórnik symetryczny.

Druga propozycja określenia współczynnika symetrii wynika z faktu, że skoro czwórnik symetryczny jest odwracalny (spełnia warunki (1), (3)) to oznacza, że można go zastąpić trzema niezależnymi parametrami. Mogą to być impedancje lub admittancej będące połączeniem trzech elementów w gwiazdę lub trójkąt. Daje to nam zastępczy czwórnik typu T lub II pokazane odpowiednio na rys.2a i 2b.



Rys.2. Czwornik typu: a) T, b) Π.

Impedancje i admitancje czworników typu T i Π wyrażone przy pomocy parametrów łańcuchowych przedstawiają zależności (8) i (9) [1,2,3]

$$(8) \quad \begin{cases} Y = C \\ Z_1 = \frac{A-1}{C} \\ Z_2 = \frac{D-1}{C} \end{cases} \quad (9) \quad \begin{cases} Z = B \\ Y_1 = \frac{D-1}{B} \\ Y_2 = \frac{A-1}{B} \end{cases}$$

Korzystając z tablic zależności między elementami macierzy różnych typów, można przedstawić powyższe zależności na podstawie innych parametrów opisujących równania czwornika [7].

Analizując zależności (8) i (9), można dojść do wniosku, że czwornik typu T jest symetryczny, gdy  $Z_1=Z_2$  natomiast typu Π gdy  $Y_1=Y_2$ .

W związku z tym proponuje się drugi współczynnik symetrii: dla czwornika typu T w postaci (10) i typu Π - (11):

$$(10) \quad W_{ST} = Z_1 - Z_2 = \frac{A-D}{C}$$

$$(11) \quad W_{S\pi} = Y_1 - Y_2 = \frac{D-A}{B}$$

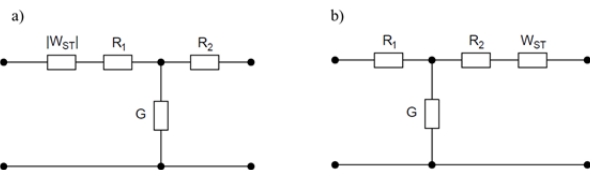
I tu również, korzystając z tablic zależności między elementami macierzy różnych typów [7], można przedstawić powyższe zależności na podstawie innych parametrów opisujących równania czwornika.

W dalszej części pracy zostaną rozpatrzone przypadki: wymuszenia stałego, stanu ustalonego dla wymuszenia harmonicznego i stanu nieustalonego przy zastosowaniu rachunku operatorowego.

### Wymuszenia stałe

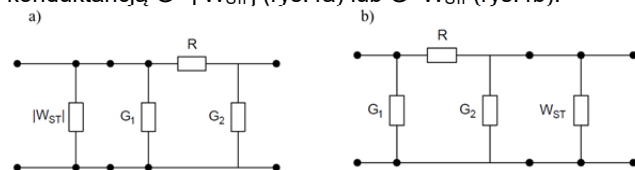
Dla wymuszeń stałych impedancja Z będzie rezystancją R natomiast admitancja Y – konduktancją G i wtedy:

- jeżeli  $W_{ST} < 0$ , to jednoelementowy czwornik symetryzujący z jedną rezystancją podłużną  $R = |W_{ST}|$  należy dołączyć kaskadowo do wejścia badanego czwornika (rys.3a);
- jeżeli  $W_{ST} > 0$ , to analogiczny czwornik symetryzujący  $R = W_{ST}$  należy dołączyć do zacisków wyjściowych (rys.3b).



Rys.3. Dołączenie czwornika symetryzującego do czwornika typu T: a)  $W_{ST} < 0$ , b)  $W_{ST} > 0$

Dla czwornika typu Π postępuje się analogicznie dołączając w taki sam sposób czwornik jednoelementowy z konduktancją  $G = |W_{S\pi}|$  (rys.4a) lub  $G = W_{S\pi}$  (rys.4b).



Rys.4. Dołączenie czwornika symetryzującego do czwornika typu Π: a)  $W_{ST} < 0$ , b)  $W_{ST} > 0$

### Wymuszenia harmoniczne w stanie ustalonym

Dla wymuszeń sinusoidalnych impedancja Z i admitancja Y będą liczbami zespolonymi. Postępowanie mające na celu symetryzację czwornika w zasadzie jest analogiczne z tym, że w tym przypadku należy brać pod uwagę znak części rzeczywistej współczynnika, ponieważ ona określa rezystancję, która musi być dodatnia. Część urojona dołączonej impedancji może być dodatnia realizowana przez reaktancję indukcyjną, lub ujemna – reaktancja pojemnościowa. Oczywiście dla admitancji w czworniku typu Π będzie odwrotnie.

#### Przykład 1.

Dany jest czwornik o parametrach łańcuchowych:  $A = 201 - j400$ ,  $B = (5.015 - j10)\Omega$ ,  $C = 20 \text{ S}$  i  $D = 101 + j200$ . Wyznaczyć współczynniki symetrii oraz układ po symetryzacji.

#### Rozwiązanie:

Współczynnik  $W_{S1}$  oblicza się wg wzoru (6):

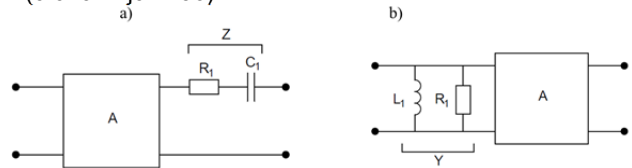
$$W_{S1} = \frac{A}{D} = \frac{201 - j400}{101 + j200} = -1.1892 - j1.6055, |W_{S1}| = 1.9980$$

Natomiast pozostałe współczynniki wg wzorów (10) i (11), mają one następującą postać:

$$W_{ST} = \frac{A-D}{C} = (5 - j30) \Omega$$

$$W_{S\pi} = \frac{D-A}{B} = (-0.0202 + j0.1196) \text{ S}$$

Realizując symetryzację wg  $W_{ST}$  otrzymuje się układ jak na rys.5a gdzie  $Z = (5-j30) \Omega$ , a wg  $W_{S\pi}$  - rys.5b gdzie  $Y = (0.0202 - j0.1196) \text{ S}$ .



Rys.5. Przykładowa symetryzacja: a) czwornik Z, b) czwornik Y

Sprawdzając wyniki symetryzacji oblicza się macierze typu A dla połączeń kaskadowych:

- dla  $W_{ST}$

$$A_Z = A A_T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 201 - j400 & -5980 - j8040 \\ 20 & 201 - j400 \end{bmatrix}$$

- dla  $W_{S\pi}$

$$A_Z = A_Y A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 201 - j400 & 5015 - j10 \\ -23.8 - j32 & 201 - j400 \end{bmatrix}$$

Jak więc widać obydwa czworniki po dołączeniu odpowiednich elementów są symetryczne – w macierzach zastępczych parametry A i D są takie same.

### Stan nieustalony

W stanie nieustalonym impedancja Z i admitancja Y będą operatorowe, a więc następującej postaci:

$$(12) \quad Z(s) = R + sL + \frac{1}{sC}, \quad Y(s) = \frac{1}{R + sL + \frac{1}{sC}}$$

Operacja symetryzacji będzie możliwa tylko wtedy, gdy we współczynniku symetrii wszystkie parametry R, L oraz C będą dodatnie lub ujemne. Mając czwornik typu T o impedancjach:

$$(13) \quad Z_1(s) = R_1 + sL_1 + \frac{1}{sC_1}, \quad Z_2(s) = R_2 + sL_2 + \frac{1}{sC_2}, \quad Y(s) = G$$

macierz łańcuchowa będzie miała postać

$$A = \begin{bmatrix} G\left(R_1 + sL_1 + \frac{1}{sC_1}\right) + 1 & X \\ G & G\left(R_2 + sL_2 + \frac{1}{sC_2}\right) + 1 \end{bmatrix}$$

(14) gdzie:

$$X = R_1 + R_2 + s(L_1 + L_2) + \frac{1}{s}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) + G\left(R_1 + sL_1 + \frac{1}{sC_1}\right)\left(R_2 + sL_2 + \frac{1}{sC_2}\right)$$

Oczywiście sprawdzając wartość wyznacznika tej macierzy otrzymujemy:  $\det(A) = 1$ .

Obliczając współczynnik symetrii określony związkami (6) otrzymujemy następujące wyrażenie:

$$(15) \quad W_{S1} = \frac{G\left(R_1 + sL_1 + \frac{1}{sC_1}\right) + 1}{G\left(R_2 + sL_2 + \frac{1}{sC_2}\right) + 1}$$

na podstawie którego, trudno jest stwierdzić jaki czwórnik dodatkowy należy przyłączyć, aby uzyskać czwórnik symetryczny. Natomiast obliczając współczynnik określony przez związek (10) otrzymuje się że:

$$(16) \quad W_{ST} = Z_1 - Z_2 = (R_1 - R_2) + s(L_1 - L_2) + \frac{1}{s} \frac{C_1 C_2}{C_2 - C_1}$$

Na podstawie (16) łatwo jest wyznaczyć parametry czwornika dodatkowego aby uzyskać czwórnik symetryczny.

### Przykład 2.

Dany jest czwórnik typu T o parametrach operatorowych:

$$Z_1(s) = \left(100 + s + \frac{10000}{s}\right) \Omega,$$

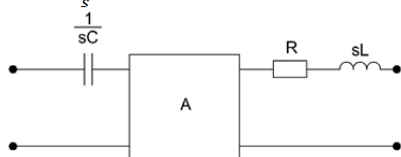
$$Z_2(s) = \left(50 + 0.5s + \frac{20000}{s}\right) \Omega, \quad Y(s) = 0.01S$$

Wyznaczyć parametry czworników dodatkowych oraz podać układ po symetryzacji.

Obliczając współczynnik  $W_{ST}$  otrzymuje się

$$W_{ST} = Z_1(s) - Z_2(s) = \left(50 + 0.5s - \frac{10000}{s}\right) \Omega$$

Analizując wartość tego współczynnika łatwo dojść do wniosku, że aby otrzymać czwórnik symetryczny w stanie nieustalonym należy do wejścia czwornika dołączyć kaskadowo czwórnik o impedancji operatorowej  $Z_{D1} = 1000/s \Omega$  (tzn. kondensator  $10^{-4} F$ ) a do wyjścia czwórnik  $Z_{D2} = (50 + 0.5s) \Omega$  (czyli szeregowo połączony opornik  $50 \Omega$  i cewkę o indukcyjności  $0.5 H$ ) (rys.6.), zakładając  $\omega = 1 \frac{rad}{s}$



Rys.6. Symetryzacja czwornika z przykładu 2.

Macierze łańcuchowe czworników dodatkowych wynoszą odpowiednio:

$$A_{D1} = \begin{bmatrix} 1 & 10000/s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{D2} = \begin{bmatrix} 1 & 50 + 0.5s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zatem macierz zastępcza

$$A_z = A_{D1} \cdot A \cdot A_{D2} = \begin{bmatrix} 2 + 0.01s + \frac{200}{s} & 0.01s^2 + 4s + 700 + \frac{8 \cdot 10^4}{s} + \frac{4 \cdot 10^6}{s^2} \\ 0.01 & 2 + 0.01s + \frac{200}{s} \end{bmatrix}$$

Jak łatwo zauważyć, w macierzy tej parametry A i D są identyczne, zatem jest to czwórnik symetryczny.

### Wnioski

Podsumowując, można stwierdzić, że współczynniki  $W_{ST}$  i  $W_{S\pi}$  są bardziej „użyteczne” ponieważ określają impedancję – admitancję czworników symetryzujących zarówno w stanie ustalonym jak i nieustalonym. Trzeba jednak pamiętać o tym, że rezystancja w czwornikach dodatkowych zawsze musi być dodatnia. Przy wymuszeniach harmonicznym część urojona impedancji może być dowolnego znaku. Natomiast w stanie nieustalonym, ponieważ impedancje są operatorowe, współczynniki przy czynnikach  $s$  i  $1/s$  powinny być dodatnie. Współczynnik określony przez związek (6) i (7) zwłaszcza przy impedancjach zespolonych i operatorowych jest trudny do interpretacji fizycznej.

### Autorzy:

dr hab. inż. Sebastian Różowicz prof. PŚk, Politechnika Świętokrzyska, Katedra Urządzeń Elektrycznych i Automatyki; Al. Tysiąclecia P. P. 7, 25-314 Kielce, E-mail: s.rozowicz@tu.kielce.pl  
dr hab. inż. Maciej Włodarczyk prof. PŚk, Politechnika Świętokrzyska, Katedra Informatyki, Elektroniki i Elektrotechniki, Al. Tysiąclecia P. P. 7, 25-314 Kielce, Poland, E-mail: m.wlodarczyk@tu.kielce.pl

dr hab. inż. Andrzej Zawadzki prof. PŚk, Politechnika Świętokrzyska, Katedra Urządzeń Elektrycznych i Automatyki; Al. Tysiąclecia P. P. 7, 25-314 Kielce, E-mail: a.zawadzki@tu.kielce.pl

### LITERATURA

- [1]. Stanisław Bolkowski: Teoria Obwodów Elektrycznych. WNT, 2012. ISBN 978-83-63623-28-9.
- [2]. Charles Alexander, Matthew Sadiku: Fundamentals of Electric Circuits. McGraw Hill, 2013. ISBN 978-0-07-338057-5.
- [3]. Krakowski M.: Elektrotechnika teoretyczna, tom I, PWN, Warszawa 1995,
- [4]. Lubelski K.: Elektrotechnika teoretyczna, cz.5, Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa 1992
- [5]. Tadeusiewicz M.: Teoria obwodów, Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź 1991
- [6]. Mikołajuk K., Trzaska Z.: Elektrotechnika teoretyczna. Analiza i synteza elektrycznych obwodów liniowych, PWN, Warszawa 1984
- [7]. Lubelski K.: Tablice pomocnicze do ćwiczeń z elektrotechniki teoretycznej, Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa 1998
- [8]. Szumilewicz i in.: Pomiary elektroniczne w technice. WNT, Warszawa 1982.
- [9]. Warsza Z. L.: Pomiary wieloparametrowe mostkami rezystancyjnymi o różnym prądowym zasilaniu. PAR Część 1 nr 7-8/2003, s. 5-11 i Część 2 nr 9/2003, s. 21-25.
- [10]. Warsza Z. L.: Mostki rezystancyjne jako układy kondycjonowania sygnałów w pomiarach kilku parametrów. Prace Naukowe Politechniki