

## Kraty dystrybucyjne w problemach analizy systemów elektroenergetycznych

**Streszczenie.** Zbiór minimalnych przekrojów z wprowadzonymi na nim operacjami binarnymi jest kratą dystrybucyjną. Zestaw minimalnych przekrojów w kratce dystrybucyjnej minimalnych przekrojów można opisać analitycznie na podstawie podzbioru nierozkładalnych minimalnych przekrojów. Proponowane jest kodowanie kraty dystrybucyjnej w celu efektywnej realizacji operacji na przekrojach.

**Abstract.** The set of minimal cuts with binary operations introduced on it is a distributive lattice. A set of minimal cuts in a distributive minimal cut lattice can be described analytically from a subset of indecomposable minimal cuts. We propose a coding of a distributive lattice for the efficient implementation of operations on cuts. (**Distributive lattices in the problems of analysis for power network systems**).

**Słowa kluczowe:** system elektroenergetyczny, graf, krata dystrybucyjna, minimalny przekrój, nierozkładalny przekrój.

**Keywords:** power systems, graph, distributive lattice, minimum cut, undecomposable cut.

### Wstęp

Wprowadzenie operacji algebraicznych na przekrojach jest podstawą do traktowania zbiorów minimalnych  $st$ -przekrojów w grafie jako krat dystrybucyjnych. To z kolei umożliwia nadanie niektórym zestawom przekrojów (w szczególności zbiorom przekrojów minimalnych) częściowego porządku i uzyskanie wizualnej reprezentacji geometrycznej takich zestawów przekrojów w postaci diagramu [1]. Teoria reprezentacji (skończonych rozkładów) krat dystrybucyjnych [2] umożliwia wyodrębnienie nierozkładalnych (nieredukowalnych) przekrojów w kratce dystrybucyjnej przekrojów i uzyskanie reprezentacji określonego zbioru przekrojów tylko przez podzbiór przekrojów nierozkładalnych. T.j. aby przeliczyć określony zbiór przekrojów, wystarczy znać skład i porządek częściowy w podzbiorze przekrojów nierozkładalnych. Wygodna realizacja operacji algebraicznych na przekrojach opiera się na kodowaniu kraty dystrybucyjnej minimalnych przekrojów.

### Krata dystrybucyjna minimalnych przekrojów grafu

Niech  $(G=(V,U), c, s, t)$  – sieć, gdzie  $G$  jest spójnym grafem skierowanym bez pętli i krawędzi wielokrotnych,  $V$  jest zbiorem wierzchołków grafu  $G$ ,  $U$  jest zbiorem skierowanych krawędzi grafu  $G$ ,  $u = (i, j) \in U$  jest zorientowaną krawędzią prowadzącą od wierzchołka  $i \in V$  do wierzchołka  $j \in V$ ,  $c: U \rightarrow \mathfrak{R}^+$  – nieujemna funkcja przepustowości (wagi),  $s, t \in V$ .

Mając dwa rozłączne podzbiory  $A$  i  $B$  zbioru  $V$  oznaczamy przez

$$(1) \quad (A, B) = \{(i, j) : (i, j) \in U; A, B \subseteq V, i \in A, j \in B\}$$

zbiór wszystkich krawędzi w  $U$  z ogonem w  $A$  i głową w  $B$ . Przekrój oddzielający  $s \in V$  od  $t \in V$  [3] to dowolny zbiór krawędzi  $r = (R, V \setminus R) \subseteq U$ , gdzie  $s \in R$  i  $t \in V \setminus R$  ( $V \setminus R$  jest dopełnieniem  $R$  w  $V$ ). Zbiór wszystkich przekrojów grafu  $G$  oznaczamy

$$(2) \quad S_{s,t} = \{r : r = (R, V \setminus R) \subseteq U, s \in R, t \in V \setminus R\}.$$

Waga (przepustowość) przekroju  $r$  to suma wag (przepustowości)

$$(3) \quad c(r) = \sum_{u \in r} c(u)$$

krawędzi w  $r$ . Funkcja  $c: 2^{V \setminus \{s,t\}} \rightarrow \mathfrak{R}^+$  jest funkcją submodularną [4] zbioru  $R \subseteq V \setminus \{s,t\}$ , tj.

$$(4) \quad c(X \cup Y) + c(X \cap Y) \leq c(X) + c(Y), X, Y \subseteq V \setminus \{s, t\}.$$

W zbiorze przekrojów  $S_{s,t}$  grafu  $G$  można wyróżnić podzbiór przekrojów o minimalnej wadze (przepustowości)

$$(5) \quad M_{c,s,t} = \{m : m = \underset{r \in S_{s,t}}{\operatorname{argmin}} c(r)\}.$$

Definiujemy operacje binarne  $\vee, \wedge$  w zbiorze  $M_{c,s,t}$ . Niech

$$(6) \quad m_3 = m_1 \vee m_2, m_4 = m_1 \wedge m_2,$$

gdzie

$$(7) \quad m_i \in M_{c,s,t}, m_i = (M_i, V \setminus M_i), M_3 = M_1 \cup M_2, M_4 = M_1 \cap M_2.$$

Można pokazać, że zbiór przekrojów minimalnych z wprowadzonymi do niego operacjami  $\vee, \wedge$  jest kratą dystrybucyjną  $\langle M_{c,s,t}; \vee, \wedge \rangle$ .

### Reprezentacja przekrojów w kratce dystrybucyjnej

Zależność częściowego porządku jest wprowadzana do kraty dystrybucyjnej minimalnych przekrojów grafu  $\langle M; \vee, \wedge \rangle$ :

$$(8) \quad m_1 \leq m_2 \Leftrightarrow m_1 \vee m_2 = m_2.$$

Dwa przekroje  $m_1, m_2$  nazywamy porównywalnymi, jeśli  $m_1 \leq m_2$  lub  $m_1 \geq m_2$ , w przeciwnym razie są nieporównywalne (co oznaczamy  $m_1 \parallel m_2$ ). Mówi się, że przekrój  $m_1$  nakrywa przekrój  $m_2$  (jest to oznaczane  $m_1 \succ m_2$ ), jeśli  $m_1 > m_2$  ( $m_1 \geq m_2, m_1 \neq m_2$ ), a takie  $m$ , gdzie  $m_1 > m > m_2$ , nie istnieje. Podzbiór przekrojów  $A \subseteq M$  jest łańcuchem, jeżeli wszystkie elementy tego zbioru są porównywalne parami i antyłańcuchem – jeżeli dla wszystkich  $m_1, m_2 \in A \Rightarrow m_1 \parallel m_2$ . Częściowo uporządkowane zbiory można przedstawić graficznie za pomocą diagramów. Elementy są przedstawione jako małe kółka (kwadraty, prostokąty, ...), okręgi odpowiadające  $m_1, m_2$  są połączone linią prostą wtedy i tylko wtedy, gdy jeden z nich nakrywa drugi; jeśli  $m_1 \succ m_2$  koło odpowiadające elementowi  $m_1$  jest umieszczone nad okręgiem odpowiadającym elementowi  $m_2$ .

Przekrój minimalny  $p \in M$  nazywa się  $\vee$ -nierozkładalnym ( $\wedge$ -nierozkładalnym) [2], jeśli dla wszystkich  $m_1, m_2 \in M$  wyrażenia  $p = m_1 \vee m_2$  ( $p = m_1 \wedge m_2$ ) wynika  $p = m_1$  lub  $p = m_2$ . Przez  $P_\vee$  ( $P_\wedge$ ) będziemy oznaczać zbiór nierozkładalnych przekrojów kraty  $\langle M; \vee, \wedge \rangle$  ( $P_\vee, P_\wedge \subseteq M$ ).

Jest oczywiste, że  $P_\vee$  jest zbiorem częściowo uporządkowanym jako podzbiór częściowo

uporządkowanego zbioru  $M$ . Zbiór antylańcuchów częściowo uporządkowanego zbioru  $P_\vee$  będziemy nazywać  $A(P_\vee)$ . Zbiór minimalnych przekrojów wzajemnie jednoznacznie odpowiada zbiorowi antylańcuchów częściowo uporządkowanego zbioru nierozkładalnych minimalnych przekrojów. Na podstawie tej zgodności zbiór minimalnych przekrojów grafu w kracie dystrybtywnej minimalnych przekrojów można opisać analitycznie jako

$$(9) \quad M = \bigcup_{L \in A(P_\vee)} (\bigvee_{a \in L} a).$$

### Kodowanie kraty dystrybtywnej

Należy przeprowadzić ścieżkowy rozkład maksymalnego przepływu  $f$  [5] (rozkład na łańcuchy przepływu  $f$ , z przepływu  $f$  w postaci wierzchołek-krawędź przejść do przepływu  $h$  w postaci krawędź-ścieżka)  $\mathcal{D} = \{D : h(D) \neq 0\} = \{D_j : j=1, 2, \dots, l\}$  i otrzymać ścieżki  $D_j = (A_j, E_j) \subseteq G = (V, U)$ , gdzie  $A_j \subseteq V$ ,  $E_j \subseteq U$ . Ścieżki definiują relację częściowego porządku w zbiorze krawędzi grafu. Modyfikujemy zbiory  $E_j$ , pozostawiając tylko krawędzie przekrojów minimalnych ( $E_j \cap m_i \neq \emptyset$ ) dla pewnego przekroju  $m_i \in M_{c,s,t}$  i zachowując relację częściowego porządku. Otrzymujemy częściowo uporządkowany zbiór  $E'_j = \{e_{jk}, k=1, 2, \dots, n_j\}, j=1, 2, \dots, l, |E'_j| \leq |E_j|$ .

Dowolny przekrój  $m_i \in M_{c,s,t}$  można przedstawić jako zbiór uporządkowany (wektor) złożony z  $l$  elementów [6]

$$(10) \quad m_i = (e_{q_{1i}}, e_{q_{2i}}, \dots, e_{q_{li}}),$$

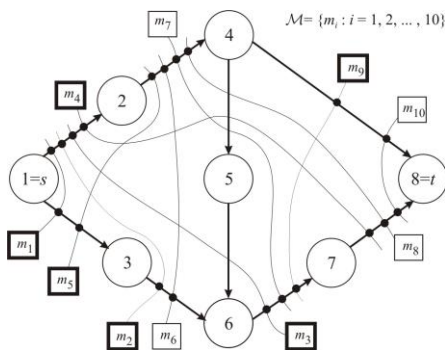
gdzie  $m_i = \bigcup_j e_{q_{ji}}$ , krawędź  $e_{q_{ji}} = E'_j \cap m_i$  jest wspólną krawędzią ścieżki  $D_j$  i przekroju  $m_i$ ,  $q_{ji}$  – numer krawędzi w uporządkowanym zbiorze  $E'_j$ .

Kodowaniem przekroju nazywa się izomorfizm  $\psi : m_i \leftrightarrow (q_{1i}, q_{2i}, \dots, q_{li})$ , a kodowaniem kraty minimalnych przekrojów  $\langle M_{c,s,t}; \vee, \wedge \rangle$  nazywa się izomorfizm [2]

$$(11) \quad \psi : \langle M_{c,s,t}; \vee, \wedge \rangle \leftrightarrow \langle W; \min, \max \rangle$$

kraty  $M_{c,s,t}$  na podkratę  $W$  kraty iloczynów łańcuchów

$$(12) \quad W \subseteq S = \prod_{i=1}^l N_j = \prod_{i=1}^l \{1 < 2 < \dots < n_j\}.$$



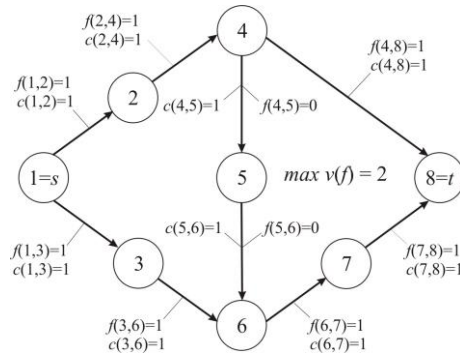
Rys.1. Zbiór minimalnych przekrojów  $M$

Operacje na przekrojach (6) podczas kodowania kraty są zamieniane na operacje współrzędnych maksimum i minimum  $m_1 \vee m_2 = \psi^{-1}(\psi(m_1) \vee \psi(m_2)) = \psi^{-1}(\max\{q_{11}, q_{12}\}, \max\{q_{21}, q_{22}\}, \dots, \max\{q_{l1}, q_{l2}\})$ ,  $m_1 \wedge m_2 = \psi^{-1}(\psi(m_1) \wedge \psi(m_2)) = \psi^{-1}(\min\{q_{11}, q_{12}\}, \min\{q_{21}, q_{22}\}, \dots, \min\{q_{l1}, q_{l2}\})$ .

Przeanalizujemy graf  $G=(V, U)$  (rys. 1). Zbiór minimalnych dwuelementowych przekrojów grafu może być przedstawiony w postaci  $M = \{m_i : i = 1, 2, \dots, 10\}$ .

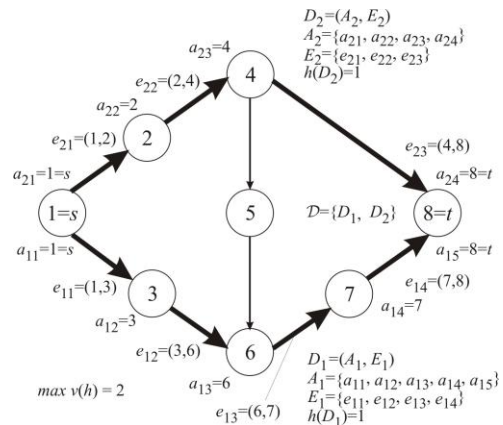
Maksymalny przepływ  $f$  w postaci wierzchołek-krawędź rozpatrywanego grafu przedstawiono na rys. 2. Wartość

maksymalnego przepływu  $v(f)=2$ . Minimalnymi przekrojami grafu są dwuelementowe przekroje.

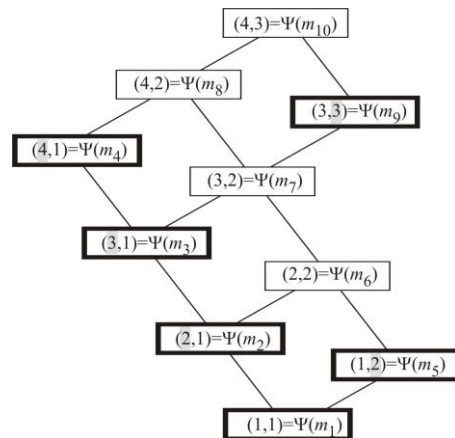


Rys.2. Maksymalny przepływ przedstawiony w postaci wierzchołek-krawędzie

Ścieżkowy rozkład maksymalnego przepływu pokazano na rys. 3, gdzie przedstawiono maksymalny przepływ  $h$  w postaci krawędź-ścieżka.



Rys.3. Maksymalny przepływ przedstawiony w postaci krawędź-ścieżki (rozkład ścieżkowy maksymalnego przepływu)



Rys.4. Diagram kraty dystrybtywnej  $\langle W; \min, \max \rangle$

Rozpatrzmy kodowanie kraty  $M$  na podkratę  $W$  kraty iloczynów łańcuchów  $S$ . W tym celu w kracie  $S$  znajdujemy elementy izomorficzne w stosunku do elementów kraty przekrojów  $M$ . Na przykład, element  $m_9$  dopuszcza przedstawienie  $\psi(m_9) = \psi(\{(6,7), (4,8)\}) = \psi(\{e_{13}, e_{23}\}) = (3, 3)$ , czyli  $q_{19}=3$  (ścieżka  $D_1$  przecina się z przekrojem  $m_9$  w trzecim elemencie  $e_{13}$  ścieżki lub po krawędzi (6,7) grafu wejściowego),  $q_{29}=3$ . Analogicznie  $\psi(m_1) = (3, 3)$ ,  $\psi(m_2) = (2,$

1),  $\psi(m_3) = (3, 1)$ ,  $\psi(m_4) = (4, 1)$ ,  $\psi(m_5) = (1, 2)$ ,  $\psi(m_6) = (2, 2)$ ,  
 $\psi(m_7) = (3, 2)$ ,  $\psi(m_8) = (4, 2)$ ,  $\psi(m_{10}) = (4, 3)$ .

Takim sposobem, zbudowana jest podkrata  $\langle W; \min, \max \rangle$  rys. 4.

Przechodząc do kraty  $W$ , otrzymujemy łatwy sposób porównywania elementów i przeprowadzania działań kratowych.

Synteza zbioru  $M \setminus P$  polega na określeniu wszystkich nietrywialnych antyłańcuchów  $A(P)$  w zbiorze  $P$ . Na podstawie diagramu rys. 4  $A(P) = \{ \{(2,1), (1,2)\}, \{(3,1), (1,2)\}, \{(4,1), (1,2)\}, \{(4,1), (3,3)\} \}$ .

Synteza zbioru przekrojów grafu:

$$\psi^{-1}((1,2) \vee (2,1)) = \psi^{-1}(\max \{1,2\}, \max \{2,2\}) = \\ = \psi^{-1}((2,2)) = \{(3,6), (2,4)\} = m_6;$$

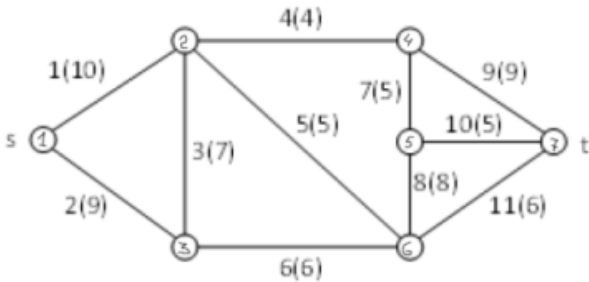
$$\psi^{-1}((1,2) \vee (3,1)) = \psi^{-1}(\max \{1,3\}, \max \{2,1\}) = \\ = \psi^{-1}((3,2)) = \{(6,7), (2,4)\} = m_7;$$

$$\psi^{-1}((1,2) \vee (4,1)) = \psi^{-1}(\max \{1,4\}, \max \{2,1\}) = \\ = \psi^{-1}((4,2)) = \{(7,8), (2,4)\} = m_8;$$

$$\psi^{-1}((3,3) \vee (4,1)) = \psi^{-1}(\max \{3,4\}, \max \{3,1\}) = \\ = \psi^{-1}((4,3)) = \{(7,8), (4,8)\} = m_{10}.$$

### Przykłady

1. Dla grafu (rys. 5) zbiór przekrojów to  $S = \{C_i : c(C_i) < 30\} = \{C_i = (R_i, V \setminus R_i) : i = 1, 2, \dots, 9\}$  [7], gdzie  $C_1 = \{6,5,4\}$ ,  $R_1 = \{1,2,3\}$ ,  $c(C_1) = 15$ ,  $C_2 = \{8,11,4\}$ ,  $R_2 = \{1,2,3,6\}$ ,  $c(C_2) = 18$ ,  $C_3 = \{1,2\}$ ,  $R_3 = \{1\}$ ,  $c(C_3) = 19$ ,  $C_4 = \{10,11,9\}$ ,  $R_4 = \{1,2,3,4,5,6\}$ ,  $c(C_4) = 20$ ,  $C_5 = \{4,7,10,11\}$ ,  $R_5 = \{1,2,3,5,6\}$ ,  $c(C_5) = 20$ ,  $C_6 = \{6,3,1\}$ ,  $R_6 = \{1,3\}$ ,  $c(C_6) = 23$ ,  $C_7 = \{4,5,3,2\}$ ,  $R_7 = \{1,2\}$ ,  $c(C_7) = 25$ ,  $C_8 = \{5,7,6,9\}$ ,  $R_8 = \{1,2,3,4\}$ ,  $c(C_8) = 25$ ,  $C_9 = \{7,11,8,9\}$ ,  $R_9 = \{1,2,3,4,6\}$ ,  $c(C_9) = 28$ . Znajomość tych przekrojów: 1) można wykorzystać do obliczania różnych charakterystyk niezawodnościowych sieci przepływowych; 2) ułatwia, a nawet umożliwia zarządzanie i utrzymanie sieci teleinformatycznych, energetycznych, ... [7]. Pierścien zbiorów  $\{R_i : i = 1, 2, \dots, 9\}$  jest kratą dystrybucyjną [8]. Na podstawie przekrojów  $C_2, C_5, C_6, C_7, C_8$  można otrzymać przekroje  $C_1, C_3, C_4, C_9$ :  $R_1 = R_6 \cup R_7$ ,  $C_1 = C_6 \cup C_7$ ,  $R_3 = R_6 \cap R_7$ ,  $C_3 = C_6 \wedge C_7$ ,  $R_4 = R_5 \cup R_8$ ,  $C_4 = C_5 \cup C_8$ ,  $C_9 = C_2 \cup C_8$ .

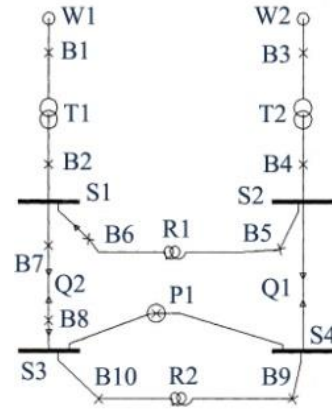


Rys.5. Graf [7], krawędź (przepustowość)

2. Dla grafu (rys. 6) zbiór przekrojów jednoelementowych zawiera 1 przekrój  $\{1:S3\}$ , dwuelementowych – 60 przekrojów  $\{2,3,4, \dots, 60\}$ , trzelementowych – 40 przekrojów  $\{61, 62, 63, \dots, 121\}$  (numeryacja przekrojów podana jest wg [9]). Kraty dystrybucyjne wygodnie jest przedstawić (rys. 7, 8) jako kraty iloczynu łańcuchowego (kodowanie kraty) [2,10].

Na rys. 7:  $44:B9, B8 \vee 40:B10, B7 = (\max \{B9, B10\}, \max \{B8, B7\}) = 38:B9, B7$  (przekrój 38, składający się z elementów  $B9, B7$ ).

Na rys. 8:  $103:B9, B2, B6 \vee 107:B10, B1, B6 \vee 100:B10, B2, R1 = (\max \{B9, B10, B10\}, \max \{B2, B1, B2\}, \max \{B6, B6, R1\}) = 92:B9, B1, R1$ .



Rys.6. Graf [9], fragment schematu systemu elektroenergetycznego

					W1>	15	52	51	50	22				
					B1>	16	59	56	53	23				
					T1>	17	60	57	54	24				
					B2>	18	61	58	55	25				
S1>	10	9	8	7	11	2	6	5	4	3				
B7>	40	39	38	35	47	12	28	27	26	19				
Q2>	43	42	41	36	48	13	31	30	29	20				
B8>	46	45	44	37	49	14	34	33	32	21				
					B10<	R2<	B9<	S4<	Q1<	S2<	B4<	T2<	B3<	W2

Rys.7. Diagram kraty przekrojów dwuelementowych

					W1>	76	75	74	62	110
					B1>	89	86	83	65	113
					T1>	90	87	84	66	114
B5>	B2					91	88	85	67	115
						B10<	R2<	B9<	S4<	Q1
					W1>	78	78	77	63	111
					B1>	98	95	92	68	116
					T1>	99	96	93	69	117
R1>	B2					100	97	94	70	118
						B10<	R2<	B9<	S4<	Q1
					W1>	82	81	80	54	112
					B1>	107	104	101	71	119
					T1>	108	105	102	72	120
B6	B2					109	106	103	73	121
						B10<	R2<	B9<	S4<	Q1

Rys.8. Diagram kraty przekrojów trzelementowych

### Wnioski

Wizualne przedstawienie i sprawne oraz efektywne przeliczenie zbioru przekrojów sieci elektrycznej wymaga uwzględnienia właściwości kraty dystrybucyjnej.

**Author:** prof. dr hab. inż. Andrey Grishkevich, Uniwersytet WSB Merito Chorzów, ul. Sportowa 29, 41-506 Chorzów, E-mail: andrey.grishkevich@chorzow.wsb.pl, grishkev.gmai@gmail.com.

## LITERATURA

- [1] Gratzner G., General lattice theory, Akademie-Verlag Berlin, 1978
- [2] Aigner M., Combinatorial theory, Springer-Verlag, 1979
- [3] Hu T., Integer programming and Network Flows, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1969
- [4] Lovász L., Plummer M. D., Matching theory, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1986
- [5] Ford L., Fullkerson D., Przepływy w sieciach, Warszawa, 1969
- [6] Grishkevich A.A., Extreme structures of electrical circuits and systems mathematical models combinatorial methods research, Publishing house SUSU, 2004
- [7] Malinowski J., A fast method for enumerating all minimal d-cut-sets in a flow network, *Safety and Reliability of Systems and Processes, Summer Safety and Reliability Seminar*, Gdynia Maritime University, 2020, 183-198
- [8] Birkhoff G., Lattice theory, American Mathematical Society, Providence, RI, 1948
- [9] Electrical Systems and Equipment (Third Edition), *Modern Power Station Practice, Incorporating Modern Power System Practice*, British Electricity International, Pergamon Press, 1992
- [10] Ore O., Theory of graphs, American Mathematical Society, Providence, RI 1962