OPEN ACCESS

PRZEGLĄD ELEKTROTECHNICZNY

Adam CICHY
ORCID: 0000-0002-7186-336X
10.15199/48.2025.08.16

Mostek do pomiaru modułu impedancji z minimalizacją sygnału wyjściowego

A bridge for measuring the impedance module with minimization of the output signal.

[1] dr hab. inż. Adam Cichy, Politechnika Śląska, Katedra Metrologii, Elektroniki i Automatyki, ul. Akademicka 10, 44-100 Gliwice
Adres do korespondencji: E-mail: adam.cichy@polsl.pl.

Streszczenie: W artykule przedstawiono koncepcję i wyniki badań mostka prądu przemiennego przeznaczonego do pomiaru modułu impedancji. Charakterystyczną cechą tego mostka jest sprowadzanie go do stanu, w którym sygnał wyjściowy mostka osiąga minimum. Zaletą takiego pomiaru jest brak problemów ze zbieżnością. Zaprezentowano ocenę dokładności mostka, jego czułości oraz zbieżności dokonaną na podstawie badania symulacyjnego oraz modelu fizycznego mostka.

Słowa kluczowe: mostki prądu przemiennego, pomiar modułu impedancji, zbieżność mostka

Abstract: The article will present the concept and results of research on an AC bridge designed to measure the impedance modulus. A characteristic feature of this bridge is that it is driven to a state in which the output signal of the bridge reaches a minimum. The advantage of such a measurement is that there are no problems with convergence. The assessment of bridge accuracy, sensitivity and convergence made on the basis of simulation study and a real bridge model is presented.

Keywords: AC bridges, impedance module measurement, bridge convergence

Wstęp

Do pomiaru składowych impedancji szeroko stosowane są mostki prądu przemiennego [1,2,3,4], często digitalizowane [5], najczęściej budowane jako mostki zrównoważone RLC. Mostki te sprowadzane są do stanu, w którym napięcie na przekątnej mostka ma wartość zerową. Taki proces pomiarowy nastręcza problemy związane z koniecznością wielokrotnego, często czasochłonnego, powtarzania kolejnych kroków równoważenia. Łatwość osiągania przez mostek stanu wyróżnionego nazywa się zbieżnością mostka. Zbieżność mostka może być problemem w automatyzacji procesu pomiarowego, w skrajnych przypadkach pojawia się problem fałszywego stanu równowagi, który to stan uniemożliwia wyznaczenie mierzonych składowych impedancji. Mniej znane są mostki, w których stanem wyróżnionym jest równość modułów [6,7] lub założone przesunięcie fazowe dwóch sygnałów [8,9]. Mostki takie nazywa się zwykle mostkami quasi-zrównoważonymi i z reguły umożliwiają one pomiar jednej składowej impedancji, choć możliwa jest budowa układów umożliwiających pomiar dwóch składowych [10]. Zaletą takich rozwiązań jest ich stale maksymalna zbieżność.

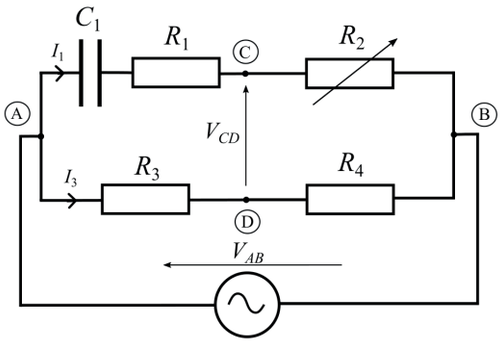
W dalszym ciągu przedstawiono układ mostka prądu przemiennego przeznaczonego do pomiaru modułu impedancji [11], którego charakterystyczną cechą jest nietypowy stan wyróżniony. Autor tej pracy przedstawił koncepcję układu i podał równanie na wyznaczenie modułu badanej impedancji w oparciu o wykres wskazowy, nie ocenił jednak właściwości omawianego mostka. Wydaje się zatem sensownym zbadanie przydatności tego rozwiązania.

Badany układ pomiarowy

Struktura mostka przedstawiona jest na rysunku 1. Mostek składa się z badanej impedancji Z_1 stanowiącej szeregowe połączenie pojemności C_1 i rezystancji R_1, rezystora nastawnego R_2, rezystorów R_3 i R_4, oraz źródła sinusoidalnego napięcia zasilającego V_{AB} włączonego na przekątną AB mostka.

Oznaczając napięcia pomiędzy punktami AD i AC jako V_{AD} i V_{AC}, napięcie wyjściowe V_{CD} można wyrazić następująco:

$$V_{CD} = V_{AB}\left(\frac{R_3R_2 - Z_1R_4}{(R_3+R_4)(Z_1+R_2)}\right) \tag{1}$$



Rys.1. Schemat mostka z minimalizacją modułu

Jeżeli rezystancje rezystorów R_3 i R_4 będą miały równe wartości, napięcie wyjściowe mostka V_{CD} będzie opisane równaniem:

$$V_{CD} = \frac{V_{AB}}{2}\left(\frac{R_2 - Z_1}{Z_1 + R_2}\right). \tag{2}$$

Mostek z rysunku 1 nie może być zrównoważony, ponieważ niemożliwe jest osiągnięcie zerowej wartości licznika wyrażenia (2). W dalszym ciągu wykazane zostanie, że mostek ten może być wykorzystany do pomiaru modułu impedancji.

Na rysunku 2 przedstawiono wykres wskazowy napięcia V_{CD}. Wykres wskazowy można skonstruować wykorzystując znaną funkcję homograficzną [4]. Funkcja ta jest funkcją zespoloną W zmiennej rzeczywistej p, o postaci

$$W = \frac{K + pL}{M + pN}. \tag{3}$$

gdzie K, L, M i N są współczynnikami zespolonymi.

Wykresem funkcji W na płaszczyźnie Gaussa jest okrąg. Współrzędne środka Wr tego okręgu można wyznaczyć z zależności:

$$W_r = \frac{j}{2}\frac{\begin{vmatrix} K & L \\ M^* & N^* \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathrm{Re}\,M & \mathrm{Im}\,M \\ \mathrm{Re}\,N & \mathrm{Im}\,N \end{vmatrix}} \tag{4}$$

gdzie j jest jednostką urojoną, a M^* i N^* są sprzężeniami liczb zespolonych M i N.

Wykres wskazowy mostka można wyznaczyć znajdując na płaszczyźnie Gaussa miejsca geometryczne potencjałów punktów C i D. Wykres konstruuje się zakładając, że potencjał punktu A jest równy 0. Wówczas potencjały punktów C i D są odpowiednio równe napięciom

V_{AC} i V_{AD}. Dodatkowo analizę ułatwia odniesienie napięć V_{AC} i V_{AD} do napięcia V_{AB} i przyjęcie jego kąta fazowego jako równego 0.

Relacja napięć V_{AC} i V_{AB} jest równa

$$\frac{V_{AC}}{V_{AB}} = \frac{Z_1}{Z_1 + R_2}. \tag{5}$$

Równanie (5) opisuje funkcję zespoloną zmiennej rzeczywistej R_2. Współczynniki K, L, M i N są odpowiednio równe: $K = Z_1$, $L = 0$, $M = Z_1$ oraz $N = 1$.

Dla obrazu funkcji (5) na płaszczyźnie zespolonej można wyznaczyć położenie środka okręgu z zależności:

$$W_r = \frac{j}{2}\frac{\begin{vmatrix} Z_1 & 0 \\ M_1^* & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathrm{Re}\,Z_1 & \mathrm{Im}\,Z_1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}. \tag{6}$$

Po przekształceniu wyrażenia (6) otrzymujemy współrzędne środka okręgu:

$$W_r = \frac{1}{2} + \frac{j}{2}\frac{\mathrm{Re}\,Z_1}{\mathrm{Im}\,Z_1}. \tag{7}$$

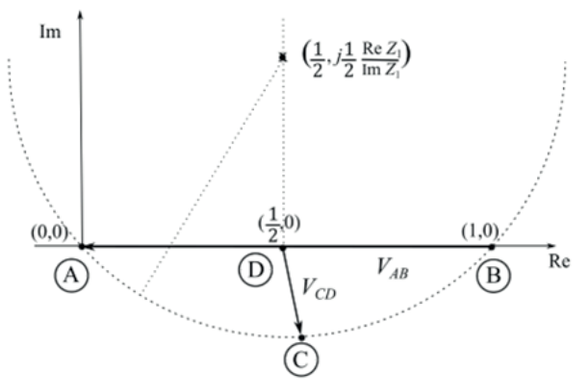
Środek okręgu znajduje się na półprostej prostopadłej do osi rzeczywistej i przechodzącej przez punkt ½, a jego położenie zależy od relacji składowej rzeczywistej do urojonej badanej impedancji Z_1.

Relację napięć V_{AD} i V_{AB} można zapisać jako:

$$\frac{V_{AD}}{V_{AB}} = \frac{R_3}{R_3 + R_4}. \tag{8}$$

Jest ona równa stale ½, o ile R_3 jest równe R_4. Oznacza to, że punkt D na wykresie wskazowym znajduje się na osi rzeczywistej o współrzędnych (1/2, 0).

Minimalną wartością parametru nastawnego R_2 jest 0. W takim przypadku miejsce geometryczne punktu C pokrywa się z punktem B o współrzędnych (1,0). Maksymalna wartość parametru R_2 dąży do nieskończoności. Wówczas miejsce geometryczne punktu C pokrywa się z punktem A o współrzędnych (0,0). Niezależnie od położenia jego środka, okręg przechodzi przez oba punkty A i B. Miejscem geometrycznym punktu C jest zatem łuk pomiędzy tymi punktami. Pro-



Rys. 2. Wykres wskazowy mostka z rysunku 1.

mień okręgu zależy od relacji składowych mierzonej impedancji. Dla zerowej składowej czynnej pomiar jest niemożliwy, ponieważ środek znajduje się na osi rzeczywistej. W takim przypadku napięcie wyjściowe jest stałe i równe 0. Podobnie jeżeli składowa bierna dąży do zera, okrąg staje się prostą, a łuk odcinkiem pomiędzy skrajnymi położeniami punktu C. I w takim przypadku pomiar jest niemożliwy.

Na rysunku 2 przedstawiono wykres wskazowy mostka z rysunku1.

W stanie wyróżnionym mostka moduł relacji napięć V_{CD} do V_{AB} osiąga minimum. Oznacza to, że pochodna modułu tej relacji po parametrze nastawnym R_2 jest równa zero:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R_2}\frac{|V_{CD}|}{|V_{AB}|}=0 \tag{9}$$

Moduł relacji V_{CD} do V_{AB} można wyznaczyć następująco:

$$\frac{|V_{CD}|}{|V_{AB}|}=\frac{1}{2}\left|\frac{R_2-Z_1}{Z_1+R_2}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{R_2^2+|Z_1|^2-2R_1R_2}{R_2^2+|Z_1|^2+2R_1R_2}} \tag{10}$$

Równanie (9) jest spełnione dla:

$$R_2=|Z_1| \tag{11}$$

Zgodnie z równaniem (11) w stanie, w którym osiągnięte zostaje minimum sygnału wyjściowego V_{CD} możliwe jest wyznaczenie modułu badanej impedancji Z_1. Moduł ten jest równy wprost nastawionej wartości rezystancji R_2.

Właściwości metrologiczne mostka

Dla omawianego mostka istotna jest ocena jego podstawowych właściwości metrologicznych, takich, jak: zakres pomiaru, czułość układu oraz błędy i niepewności pomiaru. Poniżej przedstawiona zostanie analiza wspomnianych właściwości.

Dla przedstawionego mostka wyprowadzono zależność (11) na wyznaczenie mierzonego modułu impedancji. Zakres pomiaru będzie ograniczony możliwością realizacji rezystora nastawnego oraz wpływem rezystancji przewodów, upływności izolacji czy też wpływem sił termoelektrycznych.

W omawianym układzie mostkowym można wyróżnić następujące źródła błędów i niepewności pomiaru modułu impedancji Z_1:

- niepewność związana z niedoskonałością realizacji rezystancji R_2;
- błąd związany rozdzielczością rezystora nastawnego R_2;
- błąd związany z pobudliwością wskaźnika stanu wyróżnionego;
- błąd związany z nierównością rezystorów R_3 i R_4.

Z równania (11) wynika, że w stanie wyróżnionym, moduł badanej impedancji jest równy wartości rezystancji nastawnego rezystora R_2. Oznacza to, że niepewność względna u_{rel} ($|Z_1|$) wyznaczenia modułu impedancji Z_1 będzie równa niepewności względnej u_{rel} (R_2) rezystancji R_2.

$$u_{rel}(|Z_1|)=u_{rel}(R_2). \tag{12}$$

Podobnie względny błąd rozdzielczości $\delta_r|Z_1|$ pomiaru modułu impedancji Z_1 związany z ziarnistością elementu nastawnego R_2 będzie równy względnemu błędowi rozdzielczości rezystora R_2

$$\delta|Z_1|=\delta R_2. \tag{13}$$

Istotnym problemem w omawianym układzie jest jego czułość. Wielkość ta wpływa na błąd pobudliwości układu, ponieważ w okolicy stanu wyróżnionego reakcja mostka na zmianę napięcia wejściowego może być mniejsza od progu pobudliwości detektora tego stanu. Czułość względną S_W układu opisuje równanie:

$$S_W=|Z_1|\frac{\mathrm{d}|V_{CD}|}{\mathrm{d}|Z_1|}=|Z_1|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}|Z_1|}\sqrt{\frac{R_1^2+|Z_1|^2-2R_1R_2}{R_1^2+|Z_1|^2-2R_1R_2}}. \tag{14}$$

Przyjmując, że w okolicach stanu wyróżnionego moduł impedancji Z_1 jest w przybliżeniu równy rezystancji R_2 oraz oznaczając relację rezystancji R_1 do R_2 jako A, czułość względną można oszacować jako:

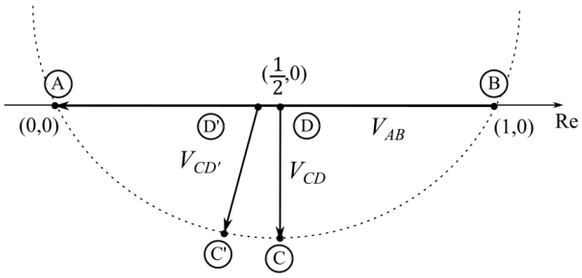
$$S_W\approx\frac{|V_{AB}|}{2}\sqrt{\frac{1-A}{1+A}}\frac{A}{(1+A)^2}. \tag{15}$$

Błąd pobudliwości mostka e_r jest ściśle związany z czułością względną i jest opisany zależnością:

$$e_r=\frac{1}{S_W}\Delta V_{CD\min}\approx\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\frac{(1+A)^2}{A}\Delta V_{CD\min}\quad, \tag{16}$$

gdzie $\Delta V_{CD\min}$ jest najmniejszą dostrzegalną zmianą napięcia wyjściowego V_{CD} spowodowaną zmianą mierzonego modułu impedancji Z_1. Maksimum błędu pobudliwości występuje dla współczynnika A równego 1, a więc dla R_1 dążącego do $|Z_1|$. Współczynnik A można interpretować jako współczynnik strat badanego obiektu. Dla obiektów niskostratnych czułość względna układu jest mała, a co za tym idzie, błąd pobudliwości jest duży.

Równanie przetwarzania omawianego układu wyznaczone zostało przy założeniu, że rezystory R_3 i R_4 mają równe wartości rezystancji. W realnych układach pomiarowych jest to oczywiście niemożliwe a brak równości wspomnianych rezystancji skutkuje przesunięciem punktu D na wykresie wskazowym. O ile częstotliwość pracy mostka nie powoduje ujawnienia się parametrów resztkowych tych rezystorów, punkt D przesuwa się na osi rzeczywistej do położenia D', co przedstawiono na rysunku 3.



Rys. 3. Ilustracja wpływu nierówności rezystorów R_3 i R_4 na położenie punktu D.

Minimum napięcia wyjściowego mostka będzie w takim przypadku znajdowało się w innym miejscu, oznaczonym jako D':

$$V_{C'D'} = V_{AB}\left(\frac{R_3}{R_3 + R_3 \pm \Delta R_3} - \frac{Z_1}{Z_1 + R_2}\right) = V_{AB}\left(\frac{1}{2 \pm \delta R_3} - \frac{Z_1}{Z_1 + R_2}\right).$$

W stanie wyróżnionym moduł napięcia $V_{C'D'}$ osiąga minimum, co oznacza, że pochodna modułu relacji napięć $V_{C'D'}$ i V_{AB} jest równa zero:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R_2}\left|\frac{V_{C'D'}}{V_{AB}}\right| = 0. \tag{18}$$

Równaność (18) jest spełniona dla modułu impedancji równego

$$Z_1\big| = R_2 \frac{1}{\sqrt{1 + \delta R_3\left(\frac{R_2}{R_1} + 1\right)}}. \tag{19}$$

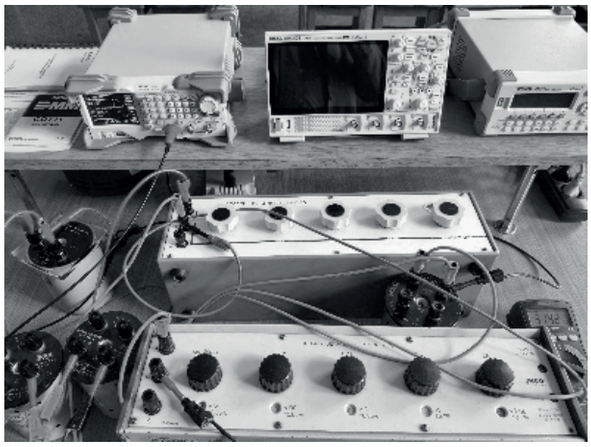
Zależność na błąd względny spowodowany nierównością rezystorów R_3 i R_4 można, uwzględniając reguły przybliżeń wielkości bliskich jedności, zapisać jako

$$\delta|Z_1| = \frac{|Z_1| - R_2}{R_2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \delta R_3\left(\frac{R_2}{R_1} + 1\right)}} - 1 \approx -\frac{1}{2}\delta R_3\left(\frac{R_2}{R_1} + 1\right). \tag{20}$$

Z równania (20) wynika, że błąd względny spowodowany nierównością rezystorów R_3 i R_4 zależy w przybliżeniu liniowo od błedu nierówności rezystorów R_3 i R_4 oraz od relacji rezystancji R_2 do R_1. W stanie bliskim stanowi wyróżnionemu błąd ten zależy również od relacji modułu impedancji Z_1 do rezystancji R_1.

Badania modelu fizycznego układu

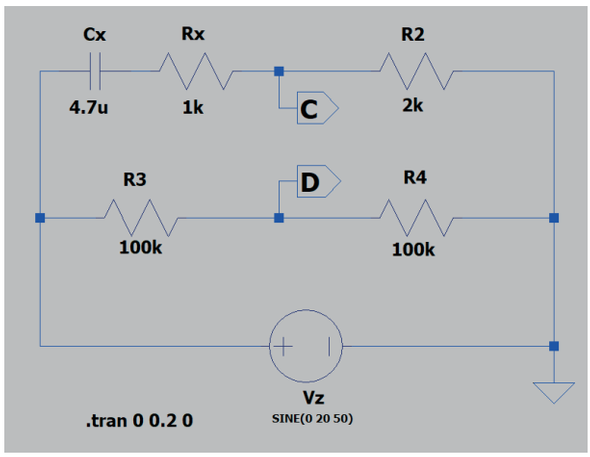
Badania mostka przeprowadzono *ad hoc* na modelu zbudowanym z rzeczywistych elementów – wzorców rezystancji i pojemności. Widok układu przedstawiono na rysunku 4.



Rys. 4. Widok modelu fizycznego mostka

Ponadto zbudowano model symulacyjny wykorzystując oprogramowanie LTSpice [12]. Na rysunku 5 zaprezentowano schemat modelu mostka.

Celem przeprowadzonych badań było potwierdzenie możliwości budowy i wykorzystania badanego układu. Jako model obiektu badanego przyjęto szeregowe połączenie wzorcowych: kondensatora oraz re-

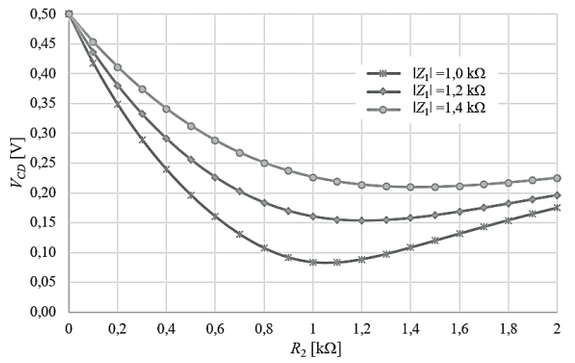


Rys. 5. Schemat modelu mostka w programie LTSpice

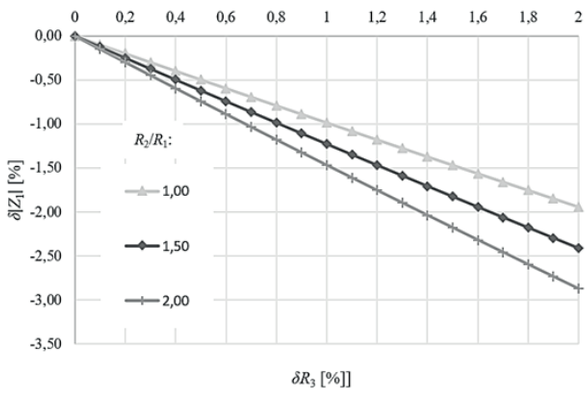
zystora. Na rysunkach 6 i 7 przedstawiono przykładowe wyniki uzyskane dla obu modeli.

Obiekt badań stanowiło szeregowe połączenie kondensatora i rezystora wzorcowego o tak dobranych wartościach, aby uzyskać załżozny moduł impedancji.

Na rysunkach 6 i 7 przedstawiono przykładowe charakterystyki sygnału wyjściowego mostka w funkcji nastawy rezystora R_2 dla różnych wartości modułu impedancji oraz zależność błędu pomiaru modułu impedancji Z_1 w funkcji błędu równości rezystorów R_2 i R_4 dla różnych relacji R_2 do R_1. Charakterystyki uzyskane zarówno dla modelu elektrycznego jak i symulacyjnie są bardzo zbliżone i potwierdzają analizę teoretyczną.



Rys. 6. Zależność sygnału wyjściowego mostka w funkcji nastawy rezystora R_2 dla różnych wartości modułu impedancji



Rys. 7. Zależność błędu pomiaru modułu impedancji Z_1 w funkcji błędu nierówności rezystorów R_2 i R_4 dla różnych relacji R_2 do R_1

Podsumowanie

Koncepcja omówionego układu mostkowego do pomiaru modułu impedancji przedstawiona została blisko pół wieku temu, jednak wówczas nie przeprowadzono analizy jego właściwości metrologicznych. Przedstawiony mostek charakteryzuje się niezwykłe prostą konstrukcją. Wymaga on użycia zaledwie trzech rezystorów, sinusoidalnego źródła zasilającego oraz wskaźnika napięciowego. Do sprowadzenia mostka do stanu wyróżnionego wystarczy jeden element nastawny – rezystor, co skutkuje stale maksymalną zbieżnością. Wykrywanie stanu wyróżnionego mostka jest proste i polega na znalezieniu minimum modułu lub wartości skutecznej napięcia wyjściowego mostka.

Ocena właściwości metrologicznych układu okazała się dość skomplikowana. Z uwagi na to, że sygnałem wyróżnionym jest moduł napięcia na przekątnej CD mostka, równania mają złożoną postać. Oceniono zależność sygnału wyjściowego od nastaw rezystora nastawnego, i oszacowano czułość układu, co pozwoliło również na ocenę błędu pobudliwości. Otrzymane wyniki zarówno obliczeniowe, symulacyjne jak i wyniki badania modelu ad hoc potwierdziły możliwość wykorzystania badanego układu.

Zakres pomiarowy mostka zależy od zakresu nastaw rezystora R_2. Należy jednak zwrócić uwagę na konieczność zapewnienia warunku $R_2>R_1$. Warunek ten oznacza, że układ nie może być wykorzystany do pomiaru obiektów czysto rezystancyjnych. Ocena niepewności związanych z odtwarzaniem wzorców rezystancji wykazała, że niepewność ta jest podobna do niepewności typowych układów mostkowych, chociaż dla omawianego układu jest ona zależna jedynie od niepewności rezystora nastawnego R_2. Źródłem błędów w omawianym mostku, które nie występuje w typowych układach mostków zrównoważonych, jest błąd związany z nierównością rezystorów R_3 i R_4. Oceniono ten błąd, jego wpływ na wynik pomiaru nie jest znaczący.

Mostek jest mostkiem niezależnym od częstotliwości, stan wyróżniony jest niezależny od napięcia zasilającego.

Wady przedstawionego mostka tkwią przede wszystkim w możliwości pomiaru wyłącznie jednej składowej impedancji – modułu. Problemem w omawianym układzie może być również jego czułość, choć ocena czułości prowadzi do zbliżonych wniosków, jak w przypadku typowych układów mostkowych. Przeprowadzone badania mostka, potwierdziły jego przydatność do pomiaru modułu impedancji.

Przyjęto: 13.08.2025, **zaakceptowano**: 19.08.2025, **opublikowano**: 29.08.2025

LITERATURA

[1] .Callegaro L., Electrical Impedance Principles, Measurement and Applications, 1st ed., CRC Press: Boca Raton, FL, USA, (2013).
[2] Overney, F., Jeanneret B., Impedance bridges: From Wheatstone to Josephson, *Metrologia*, 55 (2018), 119–134.
[3] https://kr.ietlabs.com/pdf/GenRad_History/A_History_of_Z_Measurement.pdf
[4] Karandeev K.B., Bridge and potentiometer methods of electrical measurements, Peace Publishers, Moscow, USSR, (1966).
[5] Waltrip, B. C., Oldham, N. M., Digital impedance bridge, *EEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 44 (1995), No. 2, 436–439.
[6] Cichy, A. Pomiar współczynnika strat dielektrycznych metodą dwóch woltomierzy Przegląd Elektrotechniczny, 98 (2022), nr 11,, 205–208
[7] Cichy, A., Pilśniak, A., Double-balanced bridge circuit – simulation studies, *Przegląd Elektrotechniczny*, 100 (2024), nr 6, 205–208.
[8] Cichy A., Kampik M., Quasi-zrównoważona metoda pomiaru współczynnika strat dielektrycznych, *Przegląd Elektrotechniczny*, 98 (2022), nr 12, 14–18,
[9] Amira H., Hfaiedh M., Valentin M., Quasi-balanced bridge method for the measurements of the impedances, *IET Science, Measuring and Technology*, 3 (2009), Iss. 6, 403 – 409.
[10] Atmanand M. A., Jagadeesh Kumar V., Murti V. G. K., A microcontroller based quasi-balanced bridge for the measurement of L, C and R, *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement,* 45 (1996), No. 3, 757- 761.
[11] Roy S. C. D., Impedance Measurement by a Resistive Bridge, *IEEE Transactions on Education*, 10 (1967), No. 4, 231–233.
[12] https://www.analog.com/en/design-center/design-tools--and-calculators/ltspice-simulator.htm